Matemática Inicial para Ciencias Económicas

Facultad de Ciencias Económicas
Universidad Nacional de La Plata

Irene Brambilla
Jessica Bracco
Julián Pedrazzi

15 de octubre de 2026

Índice general

1. Conjuntos numéricos y operaciones aritméticas **3**
- 1.1. Conjuntos numéricos . . . 3
- 1.2. Intervalos en $\mathbb{R}$ . . . 5
- 1.3. Operaciones básicas . . . 6
- 1.4. Mínimo común múltiplo y máximo común divisor . . . 9
- 1.5. Fracciones . . . 10
- 1.6. Números decimales . . . 14
- 1.7. Potenciación y radicación . . . 17
- 1.8. Logaritmos naturales . . . 20

2. Álgebra elemental **21**
- 2.1. Polinomios . . . 21
- 2.2. Factorización y simplificación de expresiones algebraicas . . . 23
- 2.3. Ecuaciones lineales . . . 26
- 2.4. Sistemas de ecuaciones lineales . . . 28
- 2.5. Inecuaciones lineales . . . 30
- 2.6. Ecuaciones cuadráticas . . . 31

3. Funciones **34**
- 3.1. Plano de coordenadas $\mathbb{R}^2$ . . . 34
- 3.2. Funciones y su representación gráfica . . . 35
- 3.3. Propiedades de las funciones . . . 40
- 3.4. Funciones lineales . . . 42
- 3.5. Interpretación gráfica de la solución de ecuaciones . . . 46
- 3.6. Razón de cambio de una función . . . 48

4. Proporcionalidad y porcentajes **51**
- 4.1. Proporcionalidad . . . 51
- 4.2. Porcentajes . . . 52
- 4.3. Aplicaciones de cálculos porcentuales . . . 55
  - 4.3.1. Interés sobre un depósito bancario . . . 55
  - 4.3.2. Tasa de desempleo . . . 55
  - 4.3.3. Actualizaciones por inflación . . . 56
  - 4.3.4. Descuentos en precios . . . 56
  - 4.3.5. Comparación de valores de alquileres . . . 56
  - 4.3.6. Crecimiento económico . . . 56
  - 4.3.7. Evolución de la inflación . . . 57

1. Conjuntos numéricos y operaciones aritméticas

1.1 Conjuntos numéricos

- Un **conjunto** es una colección bien definida de objetos, llamados **elementos**.

  Ejemplo: El conjunto de letras del alfabeto español está formado por los elementos $a, b, c, d, ..., z$.

  Ejemplo: El conjunto de días de la semana está formado por los elementos $lunes$, $martes$, ..., $domingo$.

- Un conjunto se representa entre llaves $\{\}$ y se suele nombrar con letras mayúsculas. Los elementos se suelen llamar con letras minúsculas. Un conjunto puede describirse por **extensión**, listando todos sus elementos.

  Ejemplo: Letras $A = \{a, b, c, ..., z\}$

  Ejemplo: Letras vocales $B = \{a, e, i, o, u\}$

- También puede describirse por **comprensión**, mediante una propiedad que los caracterice. Al definir un conjunto por comprensión se suele utilizar la barra vertical $|$, que se lee *tal que*.

  Ejemplo: $A = \{x | x$ es una letra del alfabeto español$\}$

  Ejemplo: $B = \{x | x$ es una letra vocal$\}$

- En los ejemplos anteriores introducimos una **variable** x que funciona como un nombre para referirnos a un elemento cualquiera del conjunto. Esta letra no tiene un significado especial, simplemente actúa como un nombre temporal para cualquier elemento que cumpla la propiedad.

- Entre los elementos y los conjuntos pueden establecerse las siguientes **relaciones**.

$a \in A$	El elemento a pertenece al conjunto A.
$a \notin A$	El elemento a no pertenece al conjunto A.
$A = B$	Los conjuntos A y B tienen exactamente los mismos elementos.
$A \subseteq B$	El conjunto A está incluído o es igual a B.
$A \subset B$	A es subconjunto propio de B. A está incluído en B pero no es igual.
$A \not\subseteq B$	A no está contenido en B; hay al menos un elemento de A que no está en B.

- Cuando un elemento está en un conjunto se dice que **pertenece** al conjunto. Por ejemplo la letra a pertenece al conjunto de vocales. Un conjunto puede estar **incluído** en otro conjunto. Por ejemplo el conjunto de vocales está incluído en el conjunto universal de todas las letras. También se dice que el conjunto que está incluído en otro conjunto, es un **subconjunto** del otro. La diferencia entre $\subseteq$ y $\subset$ radica en que la primera permite que los conjuntos sean iguales, mientras que la segunda indica que un conjunto está estrictamente contenido en otro.

- Los **conjuntos numéricos** son conjuntos cuyos elementos son números, y están definidos de acuerdo a sus características y propiedades.

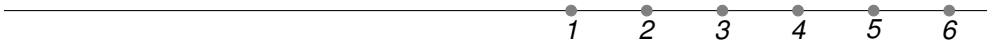
$\mathbb{N}$	Naturales	Números usados para contar: $1, 2, 3, \ldots$
$\mathbb{Z}$	Enteros	Naturales, sus opuestos negativos y el cero: $\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$
$\mathbb{Q}$	Racionales	Números que pueden expresarse como fracción, como $\frac{2}{3}$; $1{,}5$; 0,333..
$\mathbb{I}$	Irracionales	Números decimales infinitos no periódicos, como π, e, $\sqrt{2}$
$\mathbb{R}$	Reales	Todos los racionales e irracionales, como 1; $-0{,}4$; π

- El conjunto de números racionales $\mathbb{Q}$ está formado por todos los números que pueden expresarse como el cociente de dos números enteros, con denominador distinto de cero.

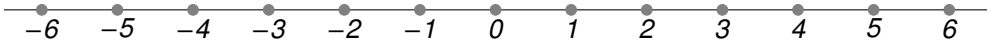
- Notar que $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, ya que todo número entero puede expresarse como una fracción con denominador igual a uno (Ejemplo: $2 = \frac{2}{1}$).

- Los números decimales exactos y periódicos pertenecen al conjunto de números racionales $\mathbb{Q}$ ya que pueden expresarse por medio de una fracción equivalente. En la fraccion equivalente, si dividimos numerador por denominador obtenemos el número decimal.
- Los números irracionales son números decimales infinitos no periódicos. No pueden escribirse por medio de una fracción equivalente. Ejemplo: $\pi \approx 3{,}14159\ldots$, $\sqrt{2} \approx 1{,}41421\ldots$, $e \approx 2{,}7182$.
- Los números reales $\mathbb{R}$ abarcan tanto a los racionales como a los irracionales.
- La relación de inclusión entre los conjuntos numéricos puede resumirse con la cadena $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Los números irracionales también están contenidos en los reales, pero no en los racionales: $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ y $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \varnothing$. Además, los racionales y los irracionales juntos forman el conjunto de los reales: $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$.
- Los números naturales, enteros y reales se prestan para ser representados gráficamente en la **recta numérica**. En el caso de los números reales, el conjunto es la recta misma.

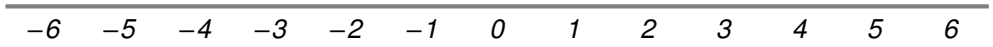
Números naturales:



Números enteros:



Números reales:



Ejercicios sobre conjuntos numéricos

(1) Los siguientes conjuntos están expresados por comprensión utilizando lenguaje natural. Expresarlos por extensión y por comprensión utilizando simbología matemática. El primero está resuelto a modo de ejemplo.

(a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ es par y menor que } 10\} = \{2, 4, 6, 8\} = \{x \in \mathbb{N} \mid (x/2) \in \mathbb{N} \text{ y } x < 10\}$

(b) $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ es negativo y mayor o igual que } -6\}$

(c) $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ es múltiplo de 3 o mayor que } 15\}$

(d) $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ es impar y menor que } 0\}$

(e) $E = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ es menor que 5 o mayor o igual que } 8\}$

(f) $F = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ es múltiplo de 4 y está entre -10 y } 10\}$

(g) $H = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ es divisible por } 5\}$

(2) Expresar los siguientes conjuntos numéricos por comprensión en lenguaje natural y con simbología matemática:

(a) $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

(b) $F = \{-4, -3, -2, -1\}$

(c) $G = \{3, 6, 9, 12, 15\}$

(d) $H = \{-5, -3, -1, 1, 3, 5\}$

(e) $I = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$

(f) $J = \{-10, -8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, 10\}$

(g) $K = \{1, 4, 9, 16, 25\}$

1.2 Intervalos en $\mathbb{R}$

- Dentro del conjunto de los números reales podemos definir **intervalos**, que son subconjuntos que agrupan a los números comprendidos entre dos extremos.

  Ejemplo: los números reales comprendidos entre *2* y *5*

- Dependiendo de si se incluyen o no los extremos, los intervalos pueden ser **abiertos** o **cerrados**. Los intervalos abiertos se representan con paréntesis () y los cerrados con corchetes [].

  Ejemplo: El intervalo abierto $(-2, 3)$ está formado por todos los números reales que son estrictamente mayores a -2 y estrictamente menores a *3*.

  Ejemplo: El intervalo cerrado $[5, 10]$ está formado por todos los números reales que son mayores o iguales a *5* y menores o iguales a *10*.

- Un intervalo que incluye uno solo de los extremos es **semiabierto** o **semicerrado** (los dos términos se usan indistintamente).

- Un intervalo que se extiende indefinidamente hacia uno o ambos lados es un **intervalo no acotado**. Para representarlo utilizamos el símbolo de infinito ∞. Para el infinito negativo usamos $-\infty$. Los intervalos no acotados por definición no pueden ser cerrados ya que no incluyen al menos uno de los extremos.

Abierto	(a, b)	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
Cerrado	$[a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
Semi abierto a izquierda	$(a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$
Semi abierto a derecha	$[a, b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
No acotado a derecha, cerrado	$[a, \infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$
No acotado a derecha, abierto	(a, ∞)	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$
No acotado a izquierda, cerrado	$(-\infty, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$
No acotado a izquierda, abierto	$(-\infty, b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$
Los números reales	$(-\infty, \infty)$	$\mathbb{R}$

- Los intervalos se pueden representar en la recta numérica. Se suele utilizar círculos vacíos para los extremos de un intervalo abierto y círculos pintados para los extremos de un intervalo cerrado.

  Intervalo abierto de los reales estrictamente mayores que *a* y estrictamente menores que *b*, (a, b)



  Intervalo cerrado de los reales mayores o iguales que *a* y menores o iguales que *b*, $[a, b]$



  Intervalo no acotado de los reales mayores o iguales que *a*, $[a, \infty)$



- Entre dos conjuntos *A* y *B* pueden establecerse las siguientes **operaciones**, que nos interesa en particular aplicar a intervalos reales. El resultado de las operaciones entre conjuntos es otro conjunto.

$A \cup B$	Unión: conjunto de elementos que pertenecen a *A*, a *B*, o a ambos.
$A \cap B$	Intersección: conjunto de elementos que pertenecen tanto a *A* como a *B*.
$A - B$	Diferencia: conjunto de elementos que pertenecen a *A* pero no a *B*.
A^c	Complemento: conjunto de elementos que no pertenecen a *A*.

- La operación **unión** indica **o** (pertenecer a un conjunto **o** al otro, o a los dos). Por ejemplo la unión entre el conjunto de vocales y el conjunto de consonantes da como resultado el conjunto de todas las letras.
- La operación **intersección** indica **y** (pertenecer a un conjunto **y** al otro). Por ejemplo, si consideramos el conjunto de todas las cartas de espadas y el conjunto de todas las cartas con valor 5, su intersección está formada únicamente por la carta 5 de espadas, que es la única que cumple ambas condiciones. Es importante entender que la intersección no es el elemento 'carta 5 de espadas', sino el conjunto formado únicamente por esa carta.
- La operación **complemento** se define con respecto a un conjunto universal de referencia. En el caso de intervalos reales, el conjunto universal son todos los reales. Por lo tanto el complemento de un intervalo real son todos los números reales que no pertenecen al intervalo.

Ejercicios sobre intervalos y conjuntos

(1) Definir los siguientes intervalos por comprensión utilizando lenguaje natural y simbología matemática y graficar en la recta numérica. Prestar atención a utilizar círculos vacíos o completos según se incluyan o no los extremos.

(a) $I_1 = (1, 6)$
(b) $I_2 = (2, 4)$
(c) $I_3 = (-2, 2)$
(d) $I_4 = [2, 4]$
(e) $I_5 = [-4, 1]$
(f) $I_6 = [3, \infty)$

Ejemplo: $I_1 = \{x \in \mathbb{R} | x$ es estrictamente mayor que uno y estrictamente menor que $6\} = \{x \in \mathbb{R} | 1 < x < 6\}$

(2) De acuerdo a los intervalos definidos en (1) escribir el conjunto que resulta de las siguientes operaciones y graficar en la recta numérica.

(a) $I_1 \cup I_3$
(b) $I_4 \cap I_5$
(c) I_4^c
(d) $I_1 \cup I_2$
(e) $I_4 \cap I_6$
(f) I_5^c
(g) $I_4 \cup I_5$
(h) $I_2 \cap I_4$
(i) $(I_1 \cup I_6)^c$
(j) $I_1 \cup I_5$
(k) $I_1 \cap I_4$
(l) $(I_1 \cap I_2)^c$
(m) $I_3 \cup I_4$
(n) $I_2 \cap I_5$
(o) $I_2 \cap \mathbb{N}$
(p) $I_1 \cup I_6$
(q) $I_5 \cap I_6$
(r) $I_2 \cap \mathbb{Z}$
(s) $I_1 \cap I_3$
(t) I_1^c
(u) $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z}$
(v) $I_1 \cap I_2$
(w) I_3^c
(x) $\mathbb{Q} \cap \mathbb{R}$

1.3 Operaciones básicas

- La suma, resta y multiplicación son **operaciones cerradas** en el conjunto de números enteros $\mathbb{Z}$, ya que al aplicarlas entre elementos de ese conjunto el resultado también es un número entero, es decir también pertenece a $\mathbb{Z}$

  Para todo $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}$:

$$a + b \in \mathbb{Z}$$
$$a - b \in \mathbb{Z}$$
$$a \cdot b \in \mathbb{Z}$$

- La división es una **operación cerrada** en el conjunto de números racionales $\mathbb{Q}$, ya que al aplicarla entre elementos de ese conjunto (excepto la división por cero, que no está definida) el resultado también es un número racional, es decir también pertenece a $\mathbb{Q}$

  Para todo $a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Q},$ con $b \neq 0$:

$$a : b \in \mathbb{Q}$$

- El cero es un **elemento neutro** para la suma y la resta, y el uno es un elemento neutro para la multiplicación y división.

Para todo $a \in \mathbb{R}$:

$$a + 0 = a$$
$$a - 0 = a$$
$$a \cdot 1 = a$$
$$a : 1 = a$$

- La suma y la multiplicación son **conmutativas**.

  Para todo $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$:

$$a + b = b + a$$
$$a \cdot b = b \cdot a$$

- La suma y la multiplicación son **asociativas**.

  Para todo $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$:

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$
$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

- La multiplicación es **distributiva** con respecto a la suma y la resta

  Para todo $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$:

$$(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$$
$$(a - b) \cdot c = (a \cdot c) - (b \cdot c)$$
$$c \cdot (a + b) = (c \cdot a) + (c \cdot b)$$
$$c \cdot (a - b) = (c \cdot a) - (c \cdot b)$$

- La división es **distributiva del lado derecho** con respecto a la suma y la resta.

  Para todo $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$, con $c \neq 0$:

$$(a + b) : c = (a : c) + (b : c)$$
$$(a - b) : c = (a : c) - (b : c)$$

- Sumar y restar se interpreta como **movimientos hacia la derecha e izquierda en la recta numérica**. Sumar un número negativo es equivalente a restar. Restar un número negativo es equivalente a sumar.

  Ejemplos:

$$5 + (-2) = 5 - 2 = 3$$
$$7 - 3 = 4$$
$$10 - (-6) = 10 + 6 = 16$$

- La multiplicación o división de **un número negativo y uno positivo**, da como resultado un número negativo

  Ejemplos:

$$10 \cdot (-2) = -20$$
$$(-4) \cdot 2 = -8$$
$$9 : (-3) = -3$$
$$(-12) : 4 = -3$$

- La multiplicación o división de **dos números negativos**, da como resultado un número positivo

  Ejemplos:

$$(-10) \cdot (-2) = 20$$
$$(-4) \cdot (-2) = 8$$
$$(-9) : (-3) = 3$$
$$(-12) : (-4) = 3$$

- La multiplicación o división de **varios números negativos** produce un resultado positivo cuando la cantidad de números negativos es par, y un resultado negativo en caso contrario

  Ejemplos:

$$(-10) \cdot (-2) \cdot (-4) \cdot (-2) = 160$$
$$(-10) \cdot (-2) \cdot 4 \cdot (-2) = -160$$
$$(-10) \cdot (-2) \cdot 4 : (-2) = -40$$

- Dos operaciones son **inversas** cuando una revierte el resultado de la otra. La suma y la resta son operaciones inversas porque si a un número le sumamos un número y luego le restamos ese mismo número, obtenemos como resultado el número inicial. Análogamente, la multiplicación y la división son operaciones inversas: si a un número lo multiplicamos por un número distinto de cero y luego lo dividimos por ese mismo número, obtenemos como resultado el número inicial.
- Para resolver **cálculos combinados** las operaciones se resuelven de acuerdo a la siguiente jerarquía
  - Paréntesis
  - Multiplicación y división
  - Suma y resta
  - Si hay operaciones de la misma jerarquía, se resuelven de izquierda a derecha.
    Ejemplo:

$$\begin{aligned} &2+3\cdot 4-(10-1):3\\ &2+3\cdot 4-9:3\\ &2+12-3\\ &11 \end{aligned}$$

- El **valor absoluto** de un número real representa su distancia al cero en la recta numérica, sin importar el signo. Se denota con barras verticales $|\ |$. El valor absoluto de un número a se escribe como $|a|$.

  Para todo $a \in R$

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

  Ejemplos:

$$\begin{aligned} |5| &= 5\\ |-3| &= 3\\ |0| &= 0 \end{aligned}$$

Ejercicios sobre operaciones básicas

(1) Resolver los siguientes cálculos

(a) $-7+12-6+3-2$
(b) $20-7+3-(-6)$
(c) $-4+9-2+7-(-5)$
(d) $5+3\cdot 2$
(e) $(5+3)\cdot 2$
(f) $12-4\cdot 2$
(g) $(12-4)\cdot 2$
(h) $18:(3+3)$
(i) $(18:3)+3$
(j) $2+3\cdot(4-1)$
(k) $(2+3)\cdot(4-1)$
(l) $14-(4+2)\cdot 3$
(m) $(10-4)\cdot(3+1)$
(n) $20-(3\cdot 2+4)$
(o) $(-4-2)\cdot(-3)\cdot(-10)$
(p) $-3\cdot 4+6$
(q) $-12:3+5$
(r) $-6+(-2\cdot 4)$
(s) $|-7|+3$
(t) $|-4+2|\cdot 3$
(u) $|6-10|+2$
(v) $|-2|\cdot(-3)$
(w) $|3\cdot(-2)|+1$

(2) Utilizar la propiedad distributiva para resolver los siguientes cálculos mentalmente (descomponer el número mayor en la suma de dos números y luego distribuir mentalmente la multiplicación)

(a) $3\cdot 64$
(b) $4\cdot 38$
(c) $5\cdot 147$

(3) Las siguientes afirmaciones sostienen (correctamente) que hay propiedades que no se cumplen. Para cada una proporcionar un contraejemplo, es decir un ejemplo que muestre que efectivamente la propiedad no se cumple.

(a) La división no es una operación cerrada en $\mathbb{Z}$
(b) El cero no es un elemento neutro para la multiplicación.

(c) La resta no es conmutativa.

(d) La resta no es asociativa.

(e) La división no es conmutativa.

(f) La división no es asociativa.

(g) La división no es distributiva del lado izquierdo con respecto a la suma y resta.

1.4 Mínimo común múltiplo y máximo común divisor

- El **mínimo común múltiplo** (*mcm*) de dos o más números es el menor número positivo que es múltiplo de todos ellos.
- En ciertos casos, el *mcm* coincide con uno de los dos números; en otros, es igual al producto de ambos; y también puede ocurrir que no sea ni uno de ellos ni su producto.

  Ejemplos:

$$mcm(2,6) = 6$$
$$mcm(4,5) = 20$$
$$mcm(4,6) = 12$$

- El **máximo común divisor** (*mcd*) de dos o más números es el mayor número que divide exactamente a todos ellos.
- En ciertos casos, el *mcd* coincide con uno de los dos números; en otros, es igual a uno; y también puede ocurrir que no sea ni uno de ellos ni uno.

  Ejemplos:

$$mcd(2,6) = 2$$
$$mcd(4,5) = 1$$
$$mcd(4,6) = 2$$

- Los **números primos** son los números naturales mayores a uno, que solamente son divisibles por si mismo y por uno, por ejemplo: *2*, *3*, *5*, *7*, *11*.
- Todo número natural mayor que *1* puede escribirse como el producto de números primos. Esto se llama **descomposición en factores primos**. Los factores primos pueden aparecer elevados a exponentes.

  Ejemplo: descomposición de 120

$$\begin{array}{r|l} 120 & 2 \\ 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5.$$

- Para calcular el *mcm* de dos números se toman todos los factores primos, con el mayor exponente.

  Ejemplo: buscar el *mcm* de *75* y *35* (subrayamos los factores primos con máximo exponente)

$$75 = \underline{3} \cdot \underline{5^2}$$
$$35 = 5 \cdot \underline{7}$$
$$mcm(75,35) = 3 \cdot 5^2 \cdot 7 = 525$$

- Para calcular el *mcd* de dos números se toman los factores primos comunes a las descomposiciones de ambos números, con el menor exponente.

  Ejemplo: buscar el *mcd* de 120 y 1.260 (subrayamos los factores primos comunes con mínimo exponente)

$$120 = 2^3 \cdot \underline{3} \cdot \underline{5}$$
$$1.260 = \underline{2^2} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$$
$$mcd(120, 1260) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$$

- **Relación entre** *mcm* **y** *mcd*. Para dos números naturales a y b, el producto de ambos es igual al producto de su *mcm* y su *mcd*. Es decir, para todo $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$:

$$a \cdot b = mcm(a, b) \cdot mcd(a, b)$$

  Ejemplos:

$2 \cdot 6 = 12$	$mcm(2, 6) \cdot mcd(2, 6) = 6 \cdot 2 = 12$
$4 \cdot 5 = 20$	$mcm(4, 5) \cdot mcd(4, 5) = 20 \cdot 1 = 20$
$4 \cdot 6 = 24$	$mcm(4, 6) \cdot mcd(4, 6) = 12 \cdot 2 = 24$
$25 \cdot 15 = 375$	$mcm(25, 15) \cdot mcd(25, 15) = 75 \cdot 5 = 375$

Ejercicios sobre *mcm* **y** *mcd*

(1) Calcular el *mcm* y el *mcd* de los siguientes números:

(a) $(8, 12)$ (c) $(14, 35)$ **(e)** $(30, 45)$
(b) $(18, 24)$ (d) $(21, 28)$ (f) $(36, 60)$

(2) Resolver:

(a) Dos timers suenan cada *18* y *24* minutos. Si acaban de coincidir en el momento en el que suenan, ¿en cuántos minutos volverán a coincidir?

(b) Si hay *36* lápices y *60* hojas de papel, ¿cuál es el mayor número de kits iguales de papeles y lápices que se puede armar sin que sobre nada?

(c) Tres luces comienzan parpadeando al mismo tiempo y luego parpadean cada *12*, *15* y *20* segundos, respectivamente. ¿Cada cuántos segundos vuelven a parpadear al mismo tiempo?

(d) Si hay *72* caramelos y *48* chupetines, ¿cuál es el mayor número de bolsitas iguales con caramelos y chupetines que se puede armar sin que sobre nada?

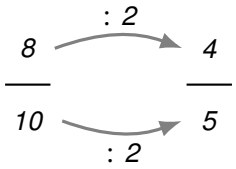
1.5 Fracciones

- Una **fracción** representa una cantidad dividida en partes iguales. Se escribe como $\frac{a}{b}$, donde a es el **numerador** e indica cuántas partes se consideran, y b es el **denominador**, que señala en cuántas partes iguales se ha dividido la cantidad original.

- Las fracciones forman parte del conjunto de los **números racionales**, que llamamos $\mathbb{Q}$, y que incluye todos los números que pueden expresarse como cociente de dos enteros, con denominador distinto de cero.

- Dos fracciones son **equivalentes** cuando representan un mismo valor. Ejemplo: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8}$.

- Si en una fracción multiplicamos o dividimos tanto el numerador como el denominador por un mismo número distinto de cero, obtenemos una fracción equivalente. Este principio también se utiliza para **simplificar** una fracción: consiste en dividir el numerador y el denominador por un mismo divisor común. Simplificar una fracción significa obtener otra equivalente cuyos términos sean lo más pequeños posible, de manera que el máximo común divisor (mcd) entre ellos sea 1.



- Dos fracciones pueden compararse para determinar cuál es mayor. La comparación se puede realizar de dos formas: (i) expresarlas utilizando fracciones equivalentes de manera que tengan el mismo denominador; (ii) comparar el producto cruzado. Para usar productos cruzados, conviene escribir previamente las fracciones con denominadores positivos.

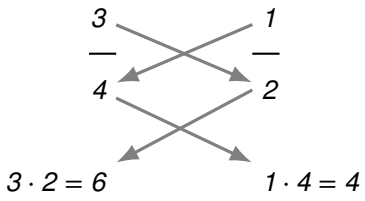
  Ejemplo: comparamos $3/4$ y $1/2$ por ambos métodos.

  - Primero las expresamos como fracciones equivalentes con un denominador común (que es 4).

    Fracciones originales: $\frac{3}{4}$ y $\frac{1}{2}$.

    Fracciones equivalentes con el mismo denominador: $\frac{3}{4}$ y $\frac{2}{4}$

    Comparamos los numeradores: $3 > 2$
  - Como segundo método evaluamos los productos cruzados:



  - Por ambos métodos concluímos que $3/4 > 1/2$.

- Tipos de fracciones

  En la siguiente clasificación consideramos fracciones con numerador no negativo y denominador positivo.

Propias	$\frac{a}{b}$ con $a < b$. Ejemplo: $\frac{3}{4}$
Impropias	$\frac{a}{b}$ con $a \geq b$. Ejemplo: $\frac{5}{3}$
Mixtas	Combinan un número entero y una fracción propia. Ejemplo: $2\frac{1}{2}$
Equivalentes	Representan el mismo valor. Ejemplo: $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
Irreducibles	No pueden simplificarse más. Ejemplo: $\frac{3}{5}$

- Para **sumar** o **restar** fracciones es necesario que tengan el mismo denominador. En ese caso, se mantienen los denominadores y se suman o restan únicamente los numeradores. Si las fracciones no comparten denominador, primero se transforman en fracciones equivalentes con un denominador común y luego se opera.

  Ejemplos:

$$\frac{1}{2} + \frac{5}{2} = \frac{1+5}{2} = \frac{6}{2} = 3 \qquad \frac{1}{6} + \frac{5}{12} = \frac{2}{12} + \frac{5}{12} = \frac{2+5}{12} = \frac{7}{12}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6} \qquad \frac{3}{4} + \frac{1}{6} = \frac{9}{12} + \frac{2}{12} = \frac{9+2}{12} = \frac{11}{12}$$

- Para **multiplicar** fracciones, se multiplican los denominadores entre sí y los numeradores entre sí.

  Ejemplos:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}=\frac{1\cdot 5}{2\cdot 2}=\frac{5}{4} \qquad \frac{2}{7}\cdot\frac{5}{3}=\frac{2\cdot 5}{7\cdot 3}=\frac{10}{21} \qquad \frac{4}{3}\cdot 2=\frac{4\cdot 2}{3\cdot 1}=\frac{8}{3}$$

- Es posible **simplificar una multiplicación** de fracciones antes de realizarla, cuando hay factores comunes entre el numerador de una fracción y el denominador de otra.

  Ejemplos:

$$\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{5}=\frac{\cancel{5}\cdot 3}{2\cdot\cancel{5}}=\frac{1\cdot 3}{2\cdot 1}=\frac{3}{2} \qquad \frac{21}{45}\cdot\frac{25}{3}=\frac{\cancel{21}\cdot\cancel{25}}{\cancel{45}\cdot\cancel{3}}=\frac{7\cdot 5}{9\cdot 1}=\frac{35}{9}$$

- La **inversa de un número racional no nulo** es otro número racional que al multiplicarlo por el número original da como resultado uno.

  Ejemplo: La inversa de $3/7$ es $7/3$ ya que

$$\frac{3}{7}\cdot\frac{7}{3}=1$$

  Ejemplo: La inversa de $1/5$ es 5 ya que

$$\frac{1}{5}\cdot 5=1$$

  Ejemplo: La inversa de 2 es $1/2$ ya que

$$2\cdot\frac{1}{2}=1$$

- La **división** de fracciones equivale a multiplicar por la inversa. Para dividir fracciones, se invierte la segunda (el divisor), se simplifica si es posible, y luego se multiplica.

  Ejemplos:

$$\frac{7}{3}:\frac{1}{2}=\frac{7}{3}\cdot\frac{2}{1}=\frac{7\cdot 2}{3\cdot 1}=\frac{14}{3} \qquad \frac{7}{3}:\frac{14}{9}=\frac{7}{3}\cdot\frac{9}{14}=\frac{\cancel{7}\cdot\cancel{9}}{\cancel{3}\cdot\cancel{14}}=\frac{1\cdot 3}{1\cdot 2}=\frac{3}{2}$$

- Una **fracción es una división** entre dos números: el numerador y el denominador.

  Ejemplos:

$$\frac{15}{3}=15:3=5 \qquad \frac{32}{4}=32:4=8 \qquad \frac{5}{2}=5:2=2{,}5$$

- Dividir por un número distinto de cero es equivalente a multiplicar por su inversa. Por ejemplo, dividir por 2 equivale a multiplicar por $\frac{1}{2}$, dividir por 3 equivale a multiplicar por $\frac{1}{3}$, y así sucesivamente.

  Ejemplos:

$$\frac{15}{7}:2=\frac{15}{7}\cdot\frac{1}{2}=\frac{15\cdot 1}{7\cdot 2}=\frac{15}{14} \qquad \frac{9}{11}:3=\frac{9}{11}\cdot\frac{1}{3}=\frac{\cancel{9}\cdot 1}{11\cdot\cancel{3}}=\frac{3\cdot 1}{11\cdot 1}=\frac{3}{11}$$

- Dado que una fracción representa una división, dividir dos fracciones puede expresarse escribiéndolas una sobre la otra, formando una **fracción compleja**. Esta es la notación habitual en matemática superior, donde no se suele utilizar el símbolo de dos puntos (:) para indicar división.

  Ejemplos:

$$\frac{5}{2}:\frac{17}{11}=\frac{\frac{5}{2}}{\frac{17}{11}} \qquad \frac{1}{3}:\frac{4}{7}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{7}}$$

- Al representar una fracción sobre otra, es posible realizar simplificaciones cruzadas entre la fracción de arriba y la de abajo. Prestar atención a los siguientes ejemplos en donde se presentan dos formas similares de resolver una misma fracción compleja.

  Ejemplos:

$$\frac{\frac{5}{2}}{\frac{15}{17}} = \frac{\frac{\cancel{5}}{2}}{\frac{\cancel{15}}{17}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{17}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{17}{3} = \frac{17}{6} \qquad \frac{5}{2} \cdot \frac{17}{15} = \frac{\cancel{5}}{2} \cdot \frac{17}{\cancel{15}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{17}{3} = \frac{17}{6}$$

$$\frac{\frac{5}{12}}{\frac{3}{16}} = \frac{\frac{5}{\cancel{12}}}{\frac{3}{\cancel{16}}} = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{3}{4}} = \frac{5}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{20}{9} \qquad \frac{5}{12} \cdot \frac{16}{3} = \frac{5}{\cancel{12}} \cdot \frac{\cancel{16}}{3} = \frac{5}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{20}{9}$$

- Al realizar un **cálculo combinado con fracciones** pueden aparecer operaciones dentro del numerador y el denominador. Es importante recordar que el numerador y el denominador funcionan como si estuvieran entre paréntesis. Esto significa que las operaciones dentro del numerador y dentro del denominador deben resolverse primero, antes de efectuar la división entre ambos.

  Ejemplos:

$$\frac{3+5}{2 \cdot 3} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \qquad \frac{12-4}{(6+2) \cdot 2} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2} \qquad \frac{2+\frac{1}{3}}{5-\frac{2}{3} \cdot 2} = \frac{2+\frac{1}{3}}{5-\frac{4}{3}} = \frac{\frac{7}{3}}{\frac{11}{3}} = \frac{7}{11}$$

- En una fracción, si el numerador o el denominador es **negativo** (pero no ambos), decimos que la fracción es negativa, ya que representa un número negativo en $\mathbb{Q}$. Recordemos que una fracción representa una división. Por lo tanto, si uno de los componentes es negativo, estamos dividiendo números con signos opuestos, y el resultado es negativo.

  Ejemplos:

$$\frac{(-2)}{3} = -\frac{2}{3} \qquad \frac{5}{(-3)} = -\frac{5}{3}$$

- En una fracción, si tanto el numerador como el denominador son negativos, la fracción representa un número positivo. Esto se debe a que los dos signos negativos se cancelan, tal como ocurre en la división de dos números enteros negativos.

  Ejemplos:

$$\frac{(-7)}{(-2)} = \frac{(\cancel{-}7)}{(\cancel{-}2)} = \frac{7}{2} \qquad \frac{(-11)}{(-18)} = \frac{(\cancel{-}11)}{(\cancel{-}18)} = \frac{11}{18}$$

Ejercicios sobre fracciones

(1) Simplificar las siguientes fracciones:

(a) $\frac{45}{60}$ **(b)** $\frac{28}{42}$ (c) $\frac{12}{18}$

(2) Resolver las siguientes operaciones básicas. Simplificar cuando sea posible. Notar que hay ocasiones en las que es conveniente simplificar antes de operar.

(a) $\frac{9}{14} + \frac{5}{21}$
(b) $\frac{2}{3} - \frac{1}{6}$
(c) $\frac{11}{18} - \frac{7}{12}$
(d) $\frac{7}{8} \cdot \frac{4}{5}$
(e) $\frac{10}{9} : \frac{15}{18}$
(f) $\frac{8}{15} : \frac{4}{9}$

(3) Expresar las siguientes fracciones como positivas o negativas según corresponda. Simplificar cuando sea posible.

(a) $\frac{-5}{8}$ (c) $\frac{-3}{-4}$ **(e)** $\frac{-11}{6}$

(b) $\frac{7}{-12}$ (d) $\frac{9}{-2}$ **(f)** $\frac{-14}{-7}$

(4) Resolver las siguientes operaciones de cálculo combinado. Simplificar cuando sea posible.

(a) $\frac{3}{4}+2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$ (c) $\left(\frac{6}{7}+\frac{2}{7}\right):\left(\frac{4}{7}-\frac{1}{7}\right)$ (e) $\left(\frac{4}{5}+\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)$

(b) $1+\frac{2}{5}-\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{8}$ **(d)** $\frac{5}{6}-\left(\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)\right)$ **(f)** $1-\left(\frac{5}{6}+\frac{1}{2}\right):\left(-\frac{2}{3}\right)$

(5) Simplificar las siguientes expresiones.

(a) $\dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{6}}$ (b) $\dfrac{\frac{7}{8}}{\frac{2}{3}}$ **(c)** $\dfrac{\frac{5}{9}}{\frac{10}{27}}$ (d) $\dfrac{\frac{4}{5}}{\frac{2}{3}}$

(6) Resolver las siguientes fracciones con operaciones en el numerador y denominador. Simplificar cuando sea posible.

(a) $\dfrac{4+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)}{3-\left(\frac{3}{4}:\left(-\frac{1}{2}\right)\right)}$ (c) $\dfrac{2-\left(\frac{3}{4}:\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}+\frac{5}{8}\right)\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)}$ **(e)** $\dfrac{1+\left(\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)\right)}{\left(\frac{4}{7}-\frac{1}{7}\right):\left(-\frac{2}{3}\right)}$

(b) $\dfrac{\left(\frac{5}{6}+\frac{1}{3}\right)}{1-\left(\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\right)}$ (d) $\dfrac{\left(\frac{9}{10}-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)}{2+\left(\frac{1}{5}:\frac{2}{3}\right)}$ (f) $\dfrac{\left(\frac{3}{5}+\frac{2}{3}\right)}{1-\left(\frac{1}{6}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)\right)}$

1.6 Números decimales

- Los **números decimales** permiten expresar cantidades mediante una **parte entera**, ubicada a la izquierda de la coma decimal, y una **parte decimal**, situada a la derecha. Todo número real admite una representación decimal: algunas son finitas, otras infinitas periódicas y otras infinitas no periódicas.
- Tipos de números decimales

Exacto	$0{,}5$; $2{,}75$	Cantidad finita de cifras decimales.
Periódico puro	$0,\overline{3}$; $1,\overline{6}$	Las cifras decimales se repiten infinitamente desde el primer decimal.
Periódico mixto	$0{,}1\overline{6}$; $2{,}3\overline{45}$	Tiene una parte no periódica seguida de una parte periódica que se repite infinitamente.
Irracional	$\pi \approx 3{,}14159\ldots$, $\sqrt{2} \approx 1{,}41421\ldots$	Cifras decimales infinitas no periódicas; no pueden expresarse como fracción.

- Los números decimales exactos y periódicos (puros y mixtos) pueden expresarse con una **fracción equivalente** y por lo tanto pertenecen a $\mathbb{Q}$. En la fracción equivalente, si dividimos numerador por denominador obtenemos el número decimal.
- Los decimales infinitos no periódicos no pueden expresarse como cociente de números enteros; por eso pertenecen al conjunto de los **números irracionales**. Al considerar tanto los números racionales como los irracionales, trabajamos en el conjunto de los **números reales** $\mathbb{R}$.

- En la parte decimal de un número, los ceros ubicados a la derecha de la última cifra distinta de cero no alteran su valor numérico. Ejemplo: $0{,}5 = 0{,}50$.
- La parte decimal de un número está compuesta por **posiciones de décimas, centésimas, milésimas**, etc. de acuerdo a la siguiente equivalencia entre números decimales y fracciones

Décimas	$0{,}1$	$\frac{1}{10}$
Centésimas	$0{,}01$	$\frac{1}{100}$
Milésimas	$0{,}001$	$\frac{1}{1.000}$

- Los números decimales exactos pueden expresarse como **fracciones decimales**, es decir, fracciones cuyo denominador es una potencia de 10. Esta potencia depende de la cantidad de posiciones decimales escritas. Para construir la fracción, se toma el número sin la coma como numerador, y se utiliza como denominador la potencia de 10 correspondiente. La fracción decimal puede luego simplificarse.

Número decimal	Fracción decimal	Fracción simplificada
$0{,}01$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$
$0{,}05$	$\frac{5}{100}$	$\frac{1}{20}$
$0{,}1$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$
$0{,}25$	$\frac{25}{100}$	$\frac{1}{4}$
$0{,}5$	$\frac{5}{10}$	$\frac{1}{2}$
$0{,}75$	$\frac{75}{100}$	$\frac{3}{4}$
$1{,}5$	$\frac{15}{10}$	$\frac{3}{2}$
$2{,}5$	$\frac{25}{10}$	$\frac{5}{2}$

- Los número decimales periódicos también pueden escribirse como fracción. En el caso de los números periódicos puros el denominador es 9, 99, 999, ..., con tantos 9 como cifras periódicas tenga el número.

Número decimal	Fracción	Fracción simplificada
$0{,}252525\ldots$	$\frac{25}{99}$	$\frac{25}{99}$
$0{,}3333\ldots$	$\frac{3}{9}$	$\frac{1}{3}$
$0{,}6666\ldots$	$\frac{6}{9}$	$\frac{2}{3}$
$1{,}252525\ldots$	$1+\frac{25}{99}$	$\frac{124}{99}$
$1{,}3333\ldots$	$1+\frac{3}{9}$	$\frac{4}{3}$
$1{,}6666\ldots$	$1+\frac{6}{9}$	$\frac{5}{3}$

- Los números periódicos mixtos también pueden expresarse como fracción, si bien no vamos a discutir aquí el procedimiento.
- Para **sumar** o **restar** números decimales se deben primero alinear las comas decimales, de manera de que décimas, centésimas, milésimas, etc, queden en la misma posición, y completar ceros de ser necesario. Lo mismo hacemos al sumar y restar números enteros, ya que alineamos decenas, centenas, etc.

  Ejemplos:

$$\begin{array}{r} 1{,}25 \\ +3{,}75 \\ \hline 5{,}00 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1{,}75 \\ +5{,}01 \\ \hline 6{,}76 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4{,}50 \\ +2{,}00 \\ \hline 6{,}50 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 10{,}60 \\ +2{,}63 \\ \hline 13{,}23 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4{,}20 \\ -1{,}75 \\ \hline 2{,}45 \end{array}$$

- Para **multiplicar** números decimales procedemos ignorando la coma. Luego se cuenta la cantidad total de posiciones decimales de ambos factores y se coloca la coma en el resultado final.

  Ejemplos:

$$\begin{array}{r} 2{,}5 \\ \times\ 3 \\ \hline 7{,}5 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3{,}75 \\ \times\ 5{,}2 \\ \hline 19{,}500 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1{,}2 \\ \times\ 0{,}75 \\ \hline 0{,}900 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0{,}5 \\ \times\ 0{,}4 \\ \hline 0{,}20 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 14 \\ \times\ 0{,}5 \\ \hline 7{,}0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 24 \\ \times\ 0{,}25 \\ \hline 6{,}00 \end{array}$$

- La multiplicación de números decimales satisface las siguientes características
  - Cuando multiplicamos un número distinto de cero por un número decimal mayor que 1, el resultado es mayor que el primer número en valor absoluto (primer y segundo ejemplo).
  - Cuando multiplicamos un número distinto de cero por un número decimal c tal que $0 < c < 1$, el resultado es menor que el primer número en valor absoluto (tercer ejemplo).
  - Cuando multiplicamos dos números decimales entre cero y uno entre sí, el resultado es menor que los dos números (cuarto ejemplo).
  - Multiplicar por $0{,}5$ es equivalente a multiplicar por $\frac{1}{2}$, que a su vez es equivalente a dividir por 2 (quinto ejemplo).
  - Multiplicar por $0{,}25$ es equivalente a multiplicar por $\frac{1}{4}$, que a su vez es equivalente a dividir por 4 (sexto ejemplo).
  - La **división** es la inversa de la multiplicación. Dividir por $0{,}5$ es equivalente a multiplicar por 2. Dividir por $0{,}25$ es equivalente a multiplicar por 4.
- **Multiplicar por potencias de** 10 es equivalente a correr la coma decimal.

  Ejemplos:

$$\begin{aligned} 2.512{,}6703 \times 100 &= 251.267{,}03 \\ 2.512{,}6703 \times 10 &= 25.126{,}703 \\ 2.512{,}6703 \times 1 &= 2.512{,}6703 \\ 2.512{,}6703 \times 0{,}1 &= 251{,}26703 \\ 2.512{,}6703 \times 0{,}01 &= 25{,}126703 \\ 2.512{,}6703 \times 0{,}001 &= 2{,}5126703 \end{aligned}$$

Ejercicios sobre números decimales

(1) Resolver las siguientes sumas y restas con decimales.

(a) $2{,}75 + 1{,}3$ (c) $0{,}9 + 0{,}09$ (e) $4{,}5 + 2{,}25$

(b) $5{,}6 - 2{,}45$ **(d)** $1{,}75 - 3{,}2$ **(f)** $-6{,}1 - 3{,}6$

(2) Resolver las siguientes operaciones mentalmente. En algunos casos es conveniente aplicar propiedad distributiva (multiplicación por $1{,}5$). Verificar con la calculadora.

(a) $10 \times 0{,}5$
(b) $6 \times 0{,}5$
(c) $2 \times 0{,}1$
(d) $5 \times 0{,}1$
(e) $200 \times 0{,}01$
(f) $100 \times 0{,}01$
(g) $4 \times 0{,}25$
(h) $8 \times 0{,}25$
(i) $15 \times 0{,}2$
(j) $3 \times 0{,}2$
(k) $4 \times 1{,}5$
(l) $2 \times 1{,}5$

1.7 Potenciación y radicación

- La **potencia** n de un número (siendo n un número natural) consiste en multiplicarlo por sí mismo n veces. Se escribe como $a^n = a \cdot a \cdot \cdots \cdot a$.

  Ejemplo: $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

- Tabla de potencias

Número	a la cero	a la uno	al cuadrado	al cubo	a la cuarta
0	no definido	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1
2	1	2	4	8	16
3	1	3	9	27	81
4	1	4	16	64	256
5	1	5	25	125	625
6	1	6	36	216	1.296

- Todo número distinto de cero elevado **a la cero** da como resultado uno. Es decir, $a^0 = 1$ para $a \neq 0$.

- Todo número elevado **a la uno** da como resultado el mismo número

- Tabla de potencias de números negativos

Número	a la cero	a la uno	al cuadrado	al cubo	a la cuarta
-1	1	-1	1	-1	1
-2	1	-2	4	-8	16
-3	1	-3	9	-27	81
-4	1	-4	16	-64	256
-5	1	-5	25	-125	625
-6	1	-6	36	-216	1.296

- Los **números negativos** dan como resultado un número positivo cuando son elevados a **potencias pares**, y dan como resultado un número negativo cuando son elevados a **potencias impares**.

  Ejemplos:

$$(-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = 4$$
$$(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$$
$$(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16$$

- La **radicación** es la operación inversa a la potenciación, teniendo en cuenta las condiciones de cada caso. Es decir, si $\sqrt[n]{a} = x$, entonces $x^n = a$. En particular, las raíces pares se definen como no negativas: por eso $\sqrt{x^2} = |x|$.

  Ejemplos: $\sqrt{25} = \sqrt{5 \cdot 5} = \sqrt{5^2} = 5$ y $\sqrt{(-4)^2} = \sqrt{16} = 4 = |-4|$.

- Los números negativos no tienen **raíces pares reales**. Esto se debe a que al elevar un número negativo a una potencia par, el resultado es un número positivo.

  Ejemplo: $(-2)^2 = 4$. La operación $\sqrt{-4}$ no tiene solución en los números reales.

- Los números negativos sí tienen **raíces impares reales**.

  Ejemplo: $(-4)^3 = -64$, por lo tanto $\sqrt[3]{-64} = \sqrt[3]{(-4)\cdot(-4)\cdot(-4)} = \sqrt[3]{(-4)^3} = \boxed{-4}$.

- La potencia y la radicación son **distributivas** con respecto a la multiplicación y división, siempre que las expresiones estén definidas. En particular, en cocientes el denominador debe ser distinto de cero; para raíces de índice par se consideran radicandos no negativos, y en el cociente de raíces de índice par el denominador debe ser positivo.

$$(a\cdot b)^n = a^n\cdot b^n \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \qquad \sqrt[n]{a\cdot b} = \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b} \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

  Ejemplos:

$$(2\cdot 3)^2 = 2^2\cdot 3^2 \qquad \left(\frac{4}{2}\right)^3 = \frac{4^3}{2^3} \qquad \sqrt{9\cdot 4} = \sqrt{9}\cdot\sqrt{4} \qquad \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{4}}$$

- Cuando multiplicamos potencias que tienen la misma base, los **exponentes se suman**.

$$a^n\cdot a^m = a^{n+m}$$

  Ejemplo:

$$2^2\cdot 2^4 = (2\cdot 2)\cdot(2\cdot 2\cdot 2\cdot 2) = 2^{2+4} = 2^6$$

- Cuando dividimos potencias que tienen la misma base, los **exponentes se restan**.

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

  Ejemplo:

$$\frac{6^3}{6^2} = 6^{3-2} = 6$$

- Cuando elevamos un número a una potencia, y luego ese resultado lo volvemos a elevar a otra potencia, los **exponentes se multiplican**.

$$(a^n)^m = a^{n\times m}$$

  Ejemplo:

$$(3^3)^2 = (3\cdot 3\cdot 3)\cdot(3\cdot 3\cdot 3) = 3^{3\times 2} = 3^6$$

- La potenciación y la radicación se pueden **simplificar**.

  Ejemplo:

$$\sqrt{5^3} = \sqrt{5^2\cdot 5} = \sqrt{5^2}\cdot\sqrt{5} = 5\cdot\sqrt{5}$$

- Cuando elevamos un número positivo a una fracción, estamos **combinando potencia y raíz**.

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}, \quad a > 0$$

  Ejemplos:

$$5^{3/2} = \sqrt{5^3} = 5\cdot\sqrt{5}$$
$$16^{1/2} = \sqrt{16^1} = 4$$

- Para calcular **potencias negativas** se invierte el número, siempre que la base sea distinta de cero. Es decir, $a^{-n} = 1/a^n$ para $a \neq 0$.

  Ejemplos:

$$4^{-1} = \frac{1}{4} \qquad 5^{-2} = \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{25} \qquad 11^{-1/2} = \left(\frac{1}{11}\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{11}}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{2} \qquad \left(\frac{7}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{7}\right)^2 = \frac{4}{49} \qquad \left(\frac{4}{3}\right)^{-3/2} = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^3} = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{3}{4}}$$

- La potencia y la radicación **no son distributivas** con respecto a la suma y la resta. Es decir, las siguientes igualdades no valen en general:

$$(a+b)^n = a^n + b^n$$
$$\sqrt[n]{a+b} = \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$$

  Por ejemplo, $(2+3)^2 = 25$, mientras que $2^2 + 3^2 = 13$; además, $\sqrt{9+16} = 5$, mientras que $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 7$.

- Para distribuir un cuadrado entre la suma o la resta de dos números se utiliza la fórmula del **binomio al cuadrado**, que se puede obtener aplicando propiedad distributiva

$$(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) = a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2$$
$$(a-b)^2 = (a-b)\cdot(a-b) = a^2 - 2\cdot a\cdot b + b^2$$

  Ejemplos:

$$(3+4)^2 = 3^2 + 2\cdot 3\cdot 4 + 4^2$$
$$(5-1)^2 = 5^2 - 2\cdot 5\cdot 1 + 1^2$$

- Para resolver cálculos combinados las operaciones se resuelven de acuerdo a la siguiente jerarquía
  - Paréntesis
  - Potencias y raíces
  - Multiplicación y división
  - Sumas y restas

Ejercicios sobre potencias y raíces

(1) Calcular las siguientes potencias y raíces:

(a) 3^2
(b) 2^4
(c) 5^0
(d) 10^1
(e) $(-2)^2$
(f) $(-3)^3$
(g) $(-1)^4$
(h) $(-6)^0$
(i) $\sqrt{49}$
(j) $\sqrt[3]{27}$
(k) $\sqrt{0}$
(l) $\sqrt[4]{81}$
(m) $-\sqrt{4}$
(n) $\sqrt{(-4)^2}$
(o) $\sqrt[3]{-8}$
(p) $-\sqrt{9}$
(q) $\sqrt[3]{-27}$
(r) $\sqrt[3]{125}$

(2) Aplicar propiedades de las potencias

(a) $2^3 \cdot 2^2$
(b) $\dfrac{5^4}{5^2}$
(c) $(3^2)^3$
(d) $(2\cdot 5)^2$
(e) $4^2 \cdot 4^3$
(f) $\dfrac{6^5}{6^2}$
(g) $(2^3)^2$
(h) $(3\cdot 2)^3$
(i) $\sqrt{3^2}$
(j) $\sqrt{5^4}$
(k) $\sqrt{5^3}$
(l) 10^{-2}
(m) 4^{-1}

(n) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$ (o) $\left(\frac{5}{4}\right)^{-1}$ **(p)** $\left(\frac{1}{4}\right)^{-3/2}$

(3) Resolver las siguientes expresiones combinadas:

(a) $(3+2)^2-(4\cdot 2)$
(b) $(-5+3)^2+\sqrt{49}$
(c) $(6-2)^3\div(2+2)$
(d) $\sqrt{(5+4)^2}-3^2$
(e) $(2^3+4)\cdot(-1)$
(f) $(\sqrt{36}-2)^2+(-3)^2$
(g) $(10-3)^2-\sqrt[3]{-8}$
(h) $(4+(-2))^3+\sqrt{25}$
(i) $\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\right)^2$
(j) $\dfrac{5^2-3^2}{\frac{4}{5}}$
(k) $\sqrt{\frac{49}{64}}+\frac{1}{8}$
(l) $\dfrac{(3^2+\sqrt{25})\cdot(4-7)}{(2^3-6)+\sqrt{36}}$
(m) $\dfrac{(5+\sqrt{49})^2-(-3)^2}{\left(\frac{8}{2}+\sqrt{16}\right)^2}$
(n) $\dfrac{(2^4-3^2)\cdot\left(\sqrt{81}-\sqrt[3]{-27}\right)}{(10-4)^2+(-2)^3}$
(o) $\dfrac{\left[(6-2)^2+\sqrt{64}\right]\cdot(-1)^3}{\left(3^2-\sqrt{49}\right)^2}$
(p) $\dfrac{\left(\sqrt{100}+2^3\right)^2-121}{\left(\sqrt{121}-5\right)^2+\sqrt[3]{-8}}$
(q) $\dfrac{(4^2-\sqrt{36})\cdot\left[\sqrt{25}+(-3)^2\right]}{(2^3+1)^2-\sqrt{49}}$

1.8 Logaritmos naturales

- El número de Euler o **constante e** es un número irracional dado por $e = 2{,}718281828...$.
- La constante e es relevante en varios contextos. Uno de ellos es para el cálculo de tasas de crecimiento continuo (por ejemplo el interés continuo sobre el capital invertido).
- La inversa de las potencias de base e son los **logaritmos naturales**, que denotamos con **ln**.

$$\text{Si } e^a = b, \text{ con } b > 0, \text{ entonces } \ln(b) = a$$

- Los logaritmos naturales satisfacen las siguientes **propiedades**
  - Logaritmo del producto, para $a > 0$ y $b > 0$: $\ln(a\cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$
  - Logaritmo del cociente, para $a > 0$ y $b > 0$: $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
  - Logaritmo de una potencia, para $a > 0$: $\ln(a^n) = n\cdot\ln(a)$
  - Logaritmo del número e: $\ln(e) = 1$
  - Logaritmo de 1: $\ln(1) = 0$
- Los logaritmos **no están definidos** para el cero ni para números negativos ya que e, que es un número positivo, no produce como resultado cero o un número negativo al elevarlo a ninguna potencia.

Ejercicios sobre logaritmos naturales

(1) Aplicar propiedades de los logaritmos:

(a) $\ln(2^3)$
(b) $\ln(5\cdot 3)$
(c) $\ln(4^2)$
(d) $\ln(6\cdot 2)$
(e) $\ln\left(\frac{2}{9}\right)$
(f) $\ln(\sqrt{2})$
(g) $\ln(e\cdot 4)$
(h) $\ln\left(\frac{1}{e}\right)$
(i) $\ln\left(\frac{1}{e^2}\right)$
(j) $\ln(16^{1/4})$
(k) $\ln\left(\frac{1}{4}\right)$
(l) $\ln\left((2+4)^2\right)$
(m) $\ln\left(\frac{2\cdot 6}{5}\right)$
(n) $\ln\left(\frac{1}{3\cdot e^3}\right)$

2. Álgebra elemental

2.1 Polinomios

- El **álgebra** es una rama de la matemática que utiliza letras o símbolos (llamadas **variables**) para representar números que pueden variar o que son desconocidos. Esta abstracción permite expresar relaciones matemáticas mediante polinomios, ecuaciones, y fórmulas.
- Un **polinomio** es una expresión algebraica formada por la suma de términos, cada uno compuesto por un número (**coeficiente**) multiplicado por una potencia de exponente no negativo de una variable. Por ejemplo el siguiente es un polinomio P en la variable x

  $$P(x) = 3x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 5x - 7$$

  Los coeficientes son $3, -2, 4, 5, -7$.
- Al escribir expresiones algebraicas como polinomios normalmente no escribimos explícitamente el signo de multiplicar. Es decir utilizamos la notación compacta de más arriba en lugar de escribirlo como

  $$P(x) = 3 \cdot x^4 - 2 \cdot x^3 + 4 \cdot x^2 + 5 \cdot x - 7$$
- Algunos de los coeficientes pueden ser uno, en ese caso no escribimos el uno explícitamente. En el siguiente ejemplo el coeficiente de x^2 es uno (y el polinomio se llama Q en lugar de P)

  $$Q(x) = 2x^3 + x^2 - 4x - 10$$
- Algunos de los coeficientes pueden ser cero, en ese caso se elimina el término. En el siguiente ejemplo los coeficientes de x^3 y x son cero (y el polinomio se llama S)

  $$S(x) = -6x^4 + 3x^2 - 10$$
- El **grado** de un polinomio es la mayor potencia a la que está elevada la variable (y cuyo coeficiente es distinto de cero). En el caso anterior el grado es 4.
- La **forma general** de un polinomio P de grado n en la variable x es

  $$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

  donde $a_i \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$. El número n es el grado del polinomio si $a_n \neq 0$.
- **Evaluar un polinomio** consiste en sustituir la variable por un número específico y calcular el valor numérico resultante.

  Ejemplo:

  $$\begin{aligned} Q(x) &= 2x^3 + x^2 - 4x - 10 \\ Q(2) &= 2(2)^3 + (2)^2 - 4(2) - 10 = 16 + 4 - 8 - 10 = 2 \\ Q(-1) &= 2(-1)^3 + (-1)^2 - 4(-1) - 10 = -2 + 1 + 4 - 10 = -7 \end{aligned}$$
- Para **sumar o restar polinomios** se suman o restan los términos semejantes (los que tienen la misma potencia de x). Por ejemplo:

  $$\begin{aligned} P(x) &= x^3 + 2x^2 + 3x + 1 \\ Q(x) &= x^2 - x + 4 \\ P(x) + Q(x) &= x^3 + 2x^2 + 3x + 1 + x^2 - x + 4 \\ &= x^3 + (2+1)x^2 + (3-1)x + (1+4) \\ &= x^3 + 3x^2 + 2x + 5 \\ P(x) - Q(x) &= x^3 + 2x^2 + 3x + 1 - (x^2 - x + 4) \\ &= x^3 + 2x^2 + 3x + 1 - x^2 + x - 4 \\ &= x^3 + (2-1)x^2 + (3+1)x + (1-4) \\ &= x^3 + x^2 + 4x - 3 \end{aligned}$$

- Para **multiplicar un polinomio por un escalar** (es decir por un número real) se aplica la propiedad distributiva

$$\begin{aligned} 5P(x) &= 5\left(x^3+2x^2+3x+1\right) \\ &= 5x^3+10x^2+15x+5 \\ (-2)P(x) &= (-2)\left(x^3+2x^2+3x+1\right) \\ &= -2x^3-4x^2-6x-2 \end{aligned}$$

- Multiplicar un polinomio por (-1) es equivalente a cambiar el signo de todos sus coeficientes

$$-P(x) = -x^3-2x^2-3x-1$$

- Para **dividir un polinomio por un escalar no nulo**, el escalar se escribe de forma fraccionaria, se aplica propiedad conmutativa de la multiplicación, y luego se aplica propiedad distributiva. El siguiente es un ejemplo de $P(x) : 2$

$$\begin{aligned} P(x) : 2 &= P(x) \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}P(x) \\ &= \frac{1}{2}\left(x^3+2x^2+3x+1\right) \\ &= \frac{1}{2}x^3+x^2+\frac{3}{2}x+\frac{1}{2} \end{aligned}$$

- Para **multiplicar dos polinomios entre sí** se aplica propiedad distributiva y luego se resuelven los términos semejantes

$$\begin{aligned} R(x) &= x+2 \\ P(x)\cdot R(x) &= \left(x^3+2x^2+3x+1\right)\cdot(x+2) \\ &= \left(x^3+2x^2+3x+1\right)\cdot x+\left(x^3+2x^2+3x+1\right)\cdot 2 \\ &= \left(x^4+2x^3+3x^2+x\right)+\left(2x^3+4x^2+6x+2\right) \\ &= x^4+(2+2)x^3+(3+4)x^2+(1+6)x+2 \\ &= x^4+4x^3+7x^2+7x+2 \end{aligned}$$

  Otro ejemplo:

$$\begin{aligned} Q(x) &= x^2-x+4 \\ S(x) &= x-3 \\ Q(x)\cdot S(x) &= \left(x^2-x+4\right)(x-3) \\ &= \left(x^2-x+4\right)\cdot x+\left(x^2-x+4\right)\cdot(-3) \\ &= \left(x^3-x^2+4x\right)+\left(-3x^2+3x-12\right) \\ &= x^3+(-1-3)x^2+(4+3)x-12 \\ &= x^3-4x^2+7x-12 \end{aligned}$$

- Para calcular la **potencia** de un polinomio se lo multiplica por sí mismo las veces que indique la potencia y se aplica propiedad distributiva. En el caso del cuadrado: $P(x)^2 = P(x)\cdot P(x)$. En el caso de un polinomio con dos términos (**binomio**), se pueden aplicar las fórmulas que se describen a continuación.

- **Cuadrado de un binomio**

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$$

Ejemplos:

$$(x+5)^2 = x^2 + 2\cdot x\cdot 5 + 5^2 = x^2 + 10x + 25$$
$$(2x-3)^2 = (2x)^2 - 2\cdot(2x)\cdot 3 + 3^2 = 4x^2 - 12x + 9$$
$$(-x^2+6)^2 = (-x^2)^2 + 2(-x^2)\cdot 6 + 6^2 = x^4 - 12x^2 + 36$$

- **Cubo de un binomio**

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Ejemplos:

$$(x+2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$
$$(x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

- La división de dos polinomios se denomina **fracción algebraica** y la raíz cuadrada de un polinomio se denomina **radical algebraico**. En algunos casos estas expresiones se pueden simplificar mediante factorización. Lo discutimos en la siguiente sección.

Ejercicios sobre operaciones con polinomios

(1) Sumar y restar los siguientes pares de polinomios

(a) $P(x) = x^2 + 2x + 1, \quad Q(x) = 3x^2 - x + 4$
(b) $A(x) = 5x^3 - x + 2, \quad B(x) = -2x^3 + 4x - 5$
(c) $R(x) = -x^4 + 3x^2, \quad S(x) = x^4 - x^2 + 1$

(2) Desarrollar las siguientes multiplicaciones de un polinomio y un escalar

(a) $4\cdot(x^2 - 3x + 2)$
(b) $-2\cdot(5x^3 + x - 1)$
(c) $(2x^5 - x^2 + 3x)\cdot(-1)$
(d) $(4x^3 - 2x + 8)\cdot\frac{1}{2}$

(3) Multiplicar cada uno de los siguientes polinomios por $(x+2)$, $(3-x^2)$, y $-(x+1)$.

(a) $x^2 + 2x + 1$
(b) $5x^3 - x + 2$

(4) Desarrollar las siguientes potencias de binomios:

(a) $(x+3)^2$
(b) $(2x-1)^2$
(c) $(-2x-3)^2$
(d) $(-x^2+x)^2$
(e) $(x+1)^3$
(f) $(x-4)^3$
(g) $(3x+2)^3$
(h) $(-2x+5)^3$
(i) $(x^2-1)^2$

2.2 Factorización y simplificación de expresiones algebraicas

- La **factorización** consiste en escribir un polinomio como producto de expresiones polinómicas más simples. Es una herramienta útil para resolver ecuaciones, simplificar expresiones y analizar funciones.
- A continuación describimos algunas situaciones que permiten factorización. No se aplican a todo polinomio.
- **Factor común**. Intuitivamente, se extrae el mayor factor que se repite en todos los términos. Es lo opuesto a distribuir la multiplicación.

  Ejemplo:

$$3x^2 + 6x = 3x(x+2)$$

- **Factor común por grupos**. Se agrupan términos para sacar factor común en dos etapas.

  Ejemplo:

$$x^3 + x^2 + x + 1 = (x^3 + x^2) + (x+1) = x^2(x+1) + 1(x+1) = (x^2+1)(x+1)$$

- **Diferencia de cuadrados**. Se aplica cuando el polinomio tiene la forma $a^2 - b^2$ de acuerdo a la siguiente igualdad conocida (que se puede verificar aplicando propiedad distributiva)

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Ejemplo:

$$x^2 - 16 = (x + 4)(x - 4)$$

- **Trinomio cuadrado perfecto**. Se aplica reconociendo la forma del binomio al cuadrado

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

Ejemplo:

$$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2 = (x + 3)(x + 3)$$

- **Regla de Ruffini**. Es un procedimiento práctico para dividir un polinomio por un binomio de forma $(x+a)$. Si esa división da exacta el polinomio original (dividendo) se puede factorizar en el producto del divisor y el cociente.

  - Se arma una tabla en donde la primera línea son los coeficientes del primer polinomio (incluyendo los coeficientes que sean cero).
  - En la segunda línea, columna izquierda, se coloca el negativo del término independiente del divisor, o sea, $-a$.
  - Se baja el primer coeficiente a la última fila y se multiplica por $-a$; el resultado se anota en la segunda fila de la columna siguiente.
  - Se suma verticalmente la segunda columna; el resultado se anota en la última fila, se multiplica por $-a$, y se continúa sucesivamente.
  - Los números de la última fila son los coeficientes del cociente. Excepto el último número que es el resto. Si el resto es cero la división es exacta. El cociente tiene un grado menos que el dividendo.

Ejemplo: dividir $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ por $(x - 1)$.

	1	-6	11	-6
1		1	-5	6
	1	-5	6	0

Resultado: $P(x) : (x - 1) = (x^2 - 5x + 6)$, por lo tanto factorizamos el polinomio como $P(x) = (x - 1)(x^2 - 5x + 6)$.

Podemos continuar factorizando el polinomio:$P(x) = (x - 1)(x^2 - 5x + 6) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$.

- Una **fracción algebraica** es una expresión del tipo:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios, y $Q(x) \neq 0$.

- Para que una fracción esté bien definida el **denominador debe ser diferente a cero**, ya que la división por cero no está definida. Es importante indicar los valores de la variable que hacen que el denominador se anule y que por lo tanto la fracción algebraica no esté definida

Ejemplo:

$$\frac{x + 2}{x^2 - 4} = \frac{x + 2}{(x - 2)(x + 2)} \quad x \neq \pm 2$$

El denominador es igual a cero para valores de x de 2 y -2.

- Para **simplificar** una fracción algebraica, se factorizan numerador y denominador y se cancelan factores comunes. Los valores que anulan el denominador original siguen excluidos, aunque ya no anulen el denominador simplificado. Siguiendo el ejemplo anterior

$$\frac{x+2}{x^2-4} = \frac{x+2}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{x-2}, \quad x \neq -2,\ x \neq 2$$

Otro ejemplo:

$$\frac{x^2-9}{x^2-x-6} = \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+2)} = \frac{x+3}{x+2}, \quad x \neq 3,\ x \neq -2.$$

- Para **sumar, restar, multiplicar y dividir** fracciones algebraicas se procede de la misma manera que con fracciones numéricas. Luego se intenta simplificar el resultado final buscando factores comunes entre denominador y numerador. Ejemplos:

Suma:

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{x+1} = \frac{1(x+1)+2x}{x(x+1)} = \frac{3x+1}{x(x+1)}, x \neq 0, x \neq -1$$

Multiplicación:

$$\frac{2x}{x+1} \cdot \frac{x+1}{3x} = \frac{2x(x+1)}{(x+1)(3x)} = \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}, \quad x \neq -1,\ x \neq 0$$

Notar que se puede simplificar antes de multiplicar

$$\frac{2\cancel{x}}{\cancel{x+1}} \cdot \frac{\cancel{x+1}}{3\cancel{x}} = \frac{2}{3}, \quad x \neq -1,\ x \neq 0$$

División:

$$\frac{x^2}{x-2} : \frac{x}{x+3} = \frac{x\cancel{^2}}{x-2} \cdot \frac{x+3}{\cancel{x}} = \frac{x(x+3)}{x-2}, \quad x \neq 2,\ x \neq -3,\ x \neq 0$$

Además de exigir denominadores distintos de cero ($x \neq 2$ y $x \neq -3$), **la fracción por la que dividimos debe ser distinta de cero**. Para $x = 0$, el divisor es $0/3 = 0$, por lo que también se excluye ese valor.

La división también puede escribirse como una fracción compleja, conservando las mismas restricciones:

$$\frac{x^2}{x-2} : \frac{x}{x+3} = \frac{\frac{x\cancel{^2}}{x-2}}{\frac{\cancel{x}}{x+3}} = \frac{x(x+3)}{x-2}, \quad x \neq 2,\ x \neq -3,\ x \neq 0$$

- Un **radical algebraico** es una expresión del tipo:

$$\sqrt[n]{P(x)}$$

- Las propiedades de los radicales algebraicos son las mismas que las de los radicales numéricos.
- Se puede intentar extraer factores afuera de la raíz para simplificar, recordando que $\sqrt{a^2} = |a|$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

Ejemplos:

$$\sqrt{x^2+2x+1} = \sqrt{(x+1)^2} = |x+1|$$

$$\sqrt{50x^2} = \sqrt{25 \cdot 2 \cdot x^2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{x^2} = 5|x|\sqrt{2}$$

Ejercicios sobre factorización y simplificación de expresiones

(1) Factorizar los siguientes polinomios:

(a) $6x^2 + 12x$
(b) $x^2 - 49$
(c) $x^2 + 6x + 9$
(d) $-5x^2 + 15x$
(e) $x^2 - 14x + 49$
(f) $4x^2 - 25$
(g) $x^2 + 10x + 25$
(h) $15x^3 - 10x^2$
(i) $4x^2 + 12x + 9$
(j) $16x^4 - 1$
(k) $x^2 - 36$
(l) $x^2 - 4x + 4$

(2) Simplificar las siguientes expresiones:

(a) $\frac{x^2-4}{x^2-x-6}$

(b) $\frac{x^2-16}{x^2+8x+16}$

(c) $\sqrt{9x^4 - 6x^2 + 1}$

(d) $\frac{\frac{x^2-4}{x^2+2x}}{\frac{x-2}{x}}$

(e) $\frac{\frac{x^2+5x+6}{x^2-9}}{\frac{x+2}{x+3}}$

(3) Realizar las siguientes operaciones. En algunas ocasiones puede resultar conveniente simplificar antes de operar. El resultado final debe expresarse de la manera más simple y compacta posible.

(a) $\frac{x}{x+2} + \frac{2x}{x+2}$
(b) $\frac{x+1}{x^2-1} - \frac{2}{x+1}$
(c) $\frac{x^2-4}{x^2+2x} \cdot \frac{x}{x-2}$
(d) $\frac{x^2+3x+2}{x^2-4} : \frac{x+1}{x+2}$
(e) $\frac{2x}{x^2-9} + \frac{3}{x-3}$
(f) $\frac{x^2-1}{x^2+x} - \frac{x-1}{x}$
(g) $\frac{x^2+5x+6}{x^2-36} \cdot \frac{x+6}{x+2}$
(h) $\frac{x^2-9}{x^2-x-6} + \frac{x+3}{x-2}$
(i) $\frac{x^2-16}{x^2+8x+16} : \frac{x-4}{x+4}$
(j) $\frac{x^2-25}{x^2-10x+25} - \frac{x+5}{x-5}$
(k) $\frac{x^2+2x}{x^2-4x} + \frac{2x}{x(x-4)}$
(l) $\frac{x^2-6x+9}{x^2-9} \cdot \frac{x+3}{x-3}$
(m) $\frac{x^2-1}{x^2-x} + \frac{x}{x-1}$
(n) $\frac{x^2+4x+4}{x^2-4} : \frac{x+2}{x-2}$
(o) $\frac{x^2-2x-3}{x^2-9} - \frac{x+1}{x+3}$
(p) $\frac{x^2-4x+4}{x^2-16} + \frac{x-2}{x+4}$
(q) $\frac{x^2+x-6}{x^2-4} \cdot \frac{x+2}{x-2}$
(r) $\frac{x^2-1}{x^2+2x+1} - \frac{x-1}{x+1}$
(s) $\frac{x^2-9x+20}{x^2-4x} + \frac{x-5}{x}$
(t) $\frac{x^2-36}{x^2+12x+36} : \frac{x-6}{x+6}$

2.3 Ecuaciones lineales

- Una **ecuación** es una igualdad matemática que contiene una o más **variables** cuyo valor es desconocido. El objetivo al resolver una ecuación es encontrar el valor de esas variables que hace que la igualdad sea verdadera.
- Vamos a discutir ecuaciones en una variable. La variable desconocida se llama comúnmente **incógnita**. La ecuación aporta **información** que nos permite resolver la incógnita.
- Una **ecuación lineal** o de primer grado es una igualdad matemática que involucra una variable elevada solo a la primera potencia. Por ejemplo, $x + 3 = 7$.
- Su **forma general** es

$$ax + b = 0, \quad a \neq 0$$

Cuando escribimos la forma general de una ecuación normalmente ponemos los términos del lado izquierdo y del lado derecho cero.

- **Resolver** una ecuación consiste en encontrar el valor de x que hace verdadera la igualdad de los dos términos.
- El procedimiento para resolver una ecuación lineal implica realizar lo que se llama habitualmente "pasajes de términos" para "despejar x".

Ejemplo 1:

$$\begin{aligned} 3x - 5 &= 10 \\ 3x &= 10 + 5 && \text{Sumamos 5 a ambos miembros} \\ 3x &= 15 \\ x &= \frac{15}{3} && \text{El 3 que está multiplicando, "pasa" dividiendo} \\ x &= 5 \end{aligned}$$

- Es importante comprender que los términos no “pasan” sino que lo anterior es una manera simplificada de ilustrar que se están realizando **operaciones elementales** de suma, resta, multiplicación y división (esta última por un número distinto de cero) que permiten simplificar la expresión

  Entonces, más formalmente:

$$
\begin{aligned}
3x - 5 &= 10 && \\
3x - \cancel{5} + \cancel{5} &= 10 + 5 && \text{Sumamos 5 de ambos lados de la igualdad y simplificamos} \\
3x &= 15 && \\
\frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}} &= \frac{15}{3} && \text{Dividimos por 3 de ambos lados de la igualdad y simplificamos} \\
x &= 5 &&
\end{aligned}
$$

- La resolución puede involucrar distribuir paréntesis o agrupar términos que contengan la incógnita

  Ejemplo 2:

$$
\begin{aligned}
2(x-3) &= x+4 && \text{Distribuimos el paréntesis} \\
2x - 6 &= x + 4 && \\
2x - x &= 4 + 6 && \text{Agrupamos los términos semejantes} \\
x &= 10 &&
\end{aligned}
$$

- Agrupar términos semejantes puede involucrar fracciones

  Ejemplo 3:

$$
\begin{aligned}
\frac{x}{2} + \frac{x}{3} &= 5 \\
\frac{3x + 2x}{6} &= 5 \\
\frac{5x}{6} &= 5 \\
x &= \frac{5 \cdot 6}{5} = 6
\end{aligned}
$$

- Hay ecuaciones lineales que pueden obtenerse a partir de ecuaciones fraccionarias simples en las que la incógnita está en el denominador.

  Ejemplo 4:

$$
\begin{aligned}
\frac{3}{x} &= 6 \\
3 &= 6x \\
\frac{3}{6} &= x \\
\frac{1}{2} &= x
\end{aligned}
$$

Ejercicios sobre ecuaciones lineales

(1) Resolver las siguientes ecuaciones lineales y en cada caso verificar que el resultado es correcto sustituyendo el valor obtenido en la ecuación.

(a) $x + 7 = 12$
(b) $-x + 9 = 15$
(c) $4x - 3 = 9$
(d) $2(x + 3) = 4x - 6$
(e) $3(x - 2) + 5 = 2(x + 1) + 7$
(f) $\frac{x}{5} + \frac{x}{2} = 7$
(g) $-2(x - 5) = -3x + 4$
(h) $-4x + 2 = -2(x + 3) - x$
(i) $\frac{1}{2}(x + 4) = \frac{3}{4}x - 2$
(j) $-\frac{2}{3}(x - 5) - \frac{1}{4}x = -\frac{3}{2}(x + 1) + \frac{5}{6}$
(k) $-\frac{5}{8}(x + 2) + \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}x - \frac{7}{8}$
(l) $\frac{3}{x} = 6$
(m) $\frac{5}{x} = -2$
(n) $\frac{2}{x} + \frac{1}{x} = 5$
(o) $\frac{7}{x} - \frac{2}{2x} = 3$
(p) $\frac{5}{x} + \frac{4}{2x} = -1$

(2) Una empresa reparte ganancias entre un equipo de trabajo formado por un ayudante, un administrativo y un técnico, de la siguiente manera: al ayudante *1/5* del total y al administrativo *1/3* del total, ¿cuánto dinero le corresponde al técnico si lo que cobran en total es *600.000* pesos?

(3) Si se le debe a un proveedor la mitad de una compra de *84.055* pesos y le cancelan la cuarta parte de esa deuda, ¿cuánto dinero le deberán aún?

(4) En un aula de la FCE asisten a un examen los *2/3* de los alumnos inscriptos en la comisión y, de estos, aprueban los *3/7*. Si los desaprobados son *24*, hallar la cantidad de alumnos inscriptos en la comisión.

(5) Hallar tres números consecutivos naturales cuya suma sea *219*.

(6) En la FCE, Ana compra un apunte de Contabilidad I con la tercera parte de su dinero y otro de Administración I con las dos terceras partes de lo que le quedaba. Al salir tiene *1.200* pesos. ¿Cuánto dinero tenía Ana?

2.4 Sistemas de ecuaciones lineales

- Un **sistema de ecuaciones** está compuesto por dos o más ecuaciones que involucran dos o más variables. Cada ecuación aporta información sobre las incógnitas. En lo que sigue, trabajaremos con dos ecuaciones lineales y dos incógnitas, que llamaremos x e y.
- Un sistema se considera **lineal** cuando todas sus ecuaciones son de primer grado. Ejemplo:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x = 2y \end{cases}$$

- Cuando resolvemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, el objetivo es encontrar los valores de x e y que **satisfacen simultáneamente** ambas ecuaciones del sistema.
- La solución no es un número aislado, sino un **par ordenado** (x, y). El valor de x solo tiene sentido junto con el valor correspondiente de y ya que ambos deben cumplir simultáneamente las ecuaciones del sistema.
- Un sistema de dos ecuaciones lineales puede tener una única solución, ninguna solución o infinitas soluciones. En los ejemplos de esta sección trabajaremos principalmente con sistemas con una única solución.
- Vamos a hablar del método de resolución por **sustitución**. Consiste en despejar una variable (puede ser x o y) en una ecuación y en sustituirla en la otra ecuación. En el ejemplo

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x = 2y \end{cases}$$

la variable x ya está despejada en la segunda ecuación, por lo tanto resulta conveniente **sustituir** $x = 2y$ en la primera ecuación de manera de obtener la solución para y:

$$\begin{aligned} x + y &= 5 \\ 2y + y &= 5 \\ 3y &= 5 \\ y &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

Una vez que encontramos el valor $y = 5/3$ lo reemplazamos en cualquiera de las dos ecuaciones originales. En este caso lo reemplazamos en la segunda ecuación y resolvemos el valor de x

$$\begin{aligned} x &= 2y \\ x &= 2 \cdot \frac{5}{3} \\ x &= \frac{10}{3} \end{aligned}$$

En este ejemplo, la solución del sistema es el par ordenado $(10/3, 5/3)$ y es única.

Para enfatizar que podemos reemplazar $y = 5/3$ en cualquiera de las dos ecuaciones, veamos ahora qué ocurre si lo reemplazamos en la primera:

$$\begin{aligned} x + y &= 5 \\ x + \frac{5}{3} &= 5 \\ x &= 5 - \frac{5}{3} \\ x &= \frac{15 - 5}{3} \\ x &= \frac{10}{3} \end{aligned}$$

Obtenemos la misma solución, el par ordenado $(10/3, 5/3)$.

- Resumiendo, la **lógica** del método es la siguiente

  (i) Se transforma el sistema en una sola ecuación con una sola incógnita mediante la sustitución de una variable, lo que permite resolver esa incógnita de forma directa.

  (ii) Una vez obtenido el valor de una de las incógnitas, se reemplaza este valor en cualquiera de las dos ecuaciones originales para resolver la incógnita restante.

- El método puede aplicarse comenzando por despejar x o y, ya sea a partir de la primera o de la segunda ecuación. La elección depende de cuál opción resulte más conveniente para simplificar los cálculos.

Ejercicios sobre sistemas de ecuaciones lineales

(1) Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales y en cada caso verificar que el resultado es correcto sustituyendo los valores obtenidos en las ecuaciones.

(a) $\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ x - y = 1 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 4x - y = 5 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 4 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 3x + 2y = 16 \\ 5x - y = 9 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ 4x - 10y = 3 \end{cases}$

(f) $\begin{cases} x = 2y + 3 \\ 3x - y = 7 \end{cases}$

(g) $\begin{cases} 2(x - 3) + y = 5 \\ -3x + 2(y + 1) = -4 \end{cases}$

(h) $\begin{cases} -4(x + 2) + 3y = 1 \\ 2x - (y - 5) = 7 \end{cases}$

(i) $\begin{cases} 3(x - 1) - 2(y + 4) = 0 \\ x + 2y = 10 \end{cases}$

(j) $\begin{cases} -2(x - 5) + y = -3 \\ 4x + 3(y - 2) = 18 \end{cases}$

(2) El precio de las entradas a un partido de fútbol es *10.000* pesos para la tribuna norte y *15.000* pesos para la tribuna Sur. Al partido fueron *3.000* hinchas y el total recaudado fue *36.200.000* pesos. ¿Es cierto que fueron *1.750* hinchas a la tribuna norte?

(3) Un grupo de amigos fue dos días a un bar donde lo que consumieron lo pagaron con un fondo común. El primer día pagaron *68.100* pesos por *5* menús y *8* bebidas, y el segundo día pagaron *41.500* por *3* menús y *5* bebidas. Ambos días, el precio de los menús fue el mismo, al igual que las bebidas ¿Cuál fue el precio de cada menú y el precio de cada bebida?

(4) En un recital se venden todas las entradas y se recaudan *20*,*3* millones de pesos. Los precios de las entradas son *30.000* pesos las generales y *65.000* pesos las vips. Calcular el número de entradas vendidas de cada tipo si el establecimiento admite *160* personas.

2.5 Inecuaciones lineales

- Una **inecuación** es una **desigualdad matemática** que contiene una o más variables cuyo valor es desconocido. Las expresiones algebraicas están relacionadas mediante los signos $>, <, \geq, \leq$.

  Una **inecuación lineal** o de primer grado es una desigualdad matemática que involucra una variable elevada solo a la primera potencia.

  Ejemplo 1: $x - 2 > \frac{x}{3}$.

- Generalmente, cuando resolvemos una inecuación no hallamos un único resultado sino que lo habitual es que hallemos un **conjunto de valores** que satisfacen la desigualdad.

  En el ejemplo anterior:

$$\begin{aligned} x - 2 &> \frac{x}{3} \\ x - \frac{x}{3} &> 2 \\ \frac{2}{3}x &> 2 \\ x &> 3 \end{aligned}$$

  La solución es el intervalo abierto $(3, \infty)$.

- En el siguiente ejemplo: $x - 2 \geq \frac{x}{3}$, la solución es el intervalo semicerrado $[3, \infty)$. La diferencia con el caso anterior es que el signo de la desigualdad es $\geq$ en lugar de $>$, por lo tanto el valor 3 satisface la desigualdad en el segundo caso pero no en el primero.

- Los métodos que se utilizan para resolver inecuaciones son los mismos que se utilizan para resolver ecuaciones, con una importante salvedad: cuando multiplicamos o dividimos ambos miembros por un mismo número negativo, **la desigualdad se invierte** (pasa de mayor a menor, o de menor a mayor).

  Ejemplo 2:

$$\begin{aligned} -\frac{x}{3} &\geq 10 \\ (-\cancel{3}) \cdot \left(-\frac{x}{\cancel{3}}\right) &\leq (-3) \cdot 10 \\ x &\leq -30 \end{aligned}$$

  La solución es el intervalo semicerrado $(-\infty, -30]$.

- La inversión de signos se debe a la propiedad de **monotonía del producto**

  Para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$ tal que $a > b$:

  Si $c > 0 \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$

  Si $c < 0 \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$

Ejercicios sobre inecuaciones lineales

(1) Resolver las siguientes inecuaciones:

(a) $2(x + 1) - 3(x - 2) < x + 6$

(b) $\frac{3x+1}{7} - \frac{2-4x}{3} \geq \frac{-5x-4}{14} + \frac{7x}{6}$

(c) $\frac{2}{3}\left[x - (1 - \frac{x-2}{3})\right] + 1 \leq x$

(d) $4 \leq 3x - 2 < 13$

(e) $(x + 1)10 + x > 6(2x + 1)$

(2) Ana y Beatriz trabajan en el sector de packaging de una pyme. Si el triple de lo que embala Ana más lo que embala Beatriz es mayor que 51 y si, además, el doble de lo que embala Ana menos lo que embala Beatriz es 24, considerando que las cantidades de embalajes son enteras no negativas, ¿cuál es la cantidad mínima de embalajes que pueden hacer juntas?

(3) Una compañía de telefonía ofrece dos planes donde el valor del minuto es de *50* pesos. El primer plan vale *13.000* pesos al mes más el valor de los minutos consumidos. El segundo plan vale *26.000* pesos al mes y rebajan una cuarta parte el valor de los minutos consumidos ¿A qué tipo de clientes le conviene el segundo plan?

(4) El administrador de un criadero está evaluando los costos de funcionamiento. Sus costos semanales son de *83.500* pesos por operación de la planta (costo fijo, ya que no depende del número de animales) más *400* pesos de alimento por cada animal vendido (costo variable, ya que depende del número de animales). Sus ingresos por venta son de *6.000* pesos por cada animal vendido. Definimos el beneficio del criadero como

Beneficio = Ingreso por ventas - Costo fijo - Costo variable

¿Cuántos animales debe vender a la semana para que su beneficio sea de al menos *100.000* pesos semanales?

2.6 Ecuaciones cuadráticas

- Una **ecuación cuadrática** es una ecuación polinómica de segundo grado, por ejemplo, $x^2 - 5x + 6 = 0$.
- Su **forma general** es

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$$

- Una ecuación cuadrática puede presentar:

  Dos soluciones reales distintas. Por ejemplo, $x^2 - 5x + 6 = 0$ tiene como soluciones $x = 2$ y $x = 3$.

  Una única solución real, llamada raíz doble. Por ejemplo, $(x - 3)^2 = 0$ se cumple únicamente cuando $x = 3$.

  Ninguna solución real. Por ejemplo, $x^2 + 1 = 0$ exigiría que $x^2 = -1$, lo cual es imposible porque el cuadrado de un número real siempre es mayor o igual que cero.

  La cantidad de soluciones reales depende de los coeficientes de la ecuación. Más adelante veremos cómo determinarla mediante el **discriminante** de la fórmula de Bhaskara.

- **Resolver una ecuación cuadrática** no es tan directo como resolver una ecuación lineal, ya que a veces no es sencillo despejar la incógnita. Pueden darse tres situaciones:

(1) Ecuaciones cuadráticas que permiten despejar la incógnita de forma directa mediante la **inversión del cuadrado**. Este método es aplicable cuando el coeficiente b en la fórmula general es igual a cero.

Ejemplo 1:

$$x^2 - 4 = 0$$
$$x^2 = 4$$
$$x = \pm\sqrt{4}$$

Solución 1: $x_1 = 2$

Solución 2: $x_2 = -2$

Notar que al invertir el cuadrado incorporamos **el signo** $\pm$ a la raíz cuadrada. Esto es una forma compacta de escribir que existen dos soluciones y que debemos obtener todos los valores de x que al cuadrado den como resultado 4, es decir 2 y -2. Verificamos que ambas soluciones satisfacen la ecuación:

$$2^2 - 4 = 4 - 4 = 0 \qquad (-2)^2 - 4 = 4 - 4 = 0$$

Ejemplo 2: la ecuación no tiene una solución real

$$x^2 + 25 = 0$$
$$x^2 = -25$$
$$x = \sqrt{-25}$$

No existe solución real

(2) Ecuaciones cuadráticas que pueden resolverse mediante **factorización**. Este método es aplicable cuando la ecuación puede expresarse como el producto de dos términos lineales en x. Como el producto es igual a cero, al menos uno de los factores debe ser cero.

Ejemplo 3:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$
$$(x-2)(x-3) = 0$$

Solución 1: $x - 2 = 0 \rightarrow x_1 = 2$

Solución 2: $x - 3 = 0 \rightarrow x_2 = 3$

Ejemplo 4:

$$2x^2 + 8x = 0$$
$$2x(x+4) = 0$$

Solución 1: $2x = 0 \rightarrow x_1 = 0$

Solución 2: $x + 4 = 0 \rightarrow x_2 = -4$

(3) Ecuaciones cuadráticas que requieren aplicar la **Regla de Bhaskara**, válida para cualquier ecuación de segundo grado. La solución se obtiene a partir de los coeficientes a, b y c de la fórmula general.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplo 5:

$$2x^2 + 3x - 5 = 0$$

Aplicamos la fórmula:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5)}}{2 \cdot 2}$$
$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 40}}{4}$$
$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{4}$$
$$x = \frac{-3 \pm 7}{4}$$

Solución 1: $x_1 = \frac{-3+7}{4} = 1$

Solución 2: $x_2 = \frac{-3-7}{4} = -2{,}5$

- Cuando una ecuación cuadrática tiene dos soluciones, es porque ambos valores satisfacen la igualdad: al sustituirlos en la ecuación, la expresión se cumple en cada caso.
- En la Regla de Bhaskara, la expresión que aparece dentro de la raíz cuadrada se denomina **discriminante**, y comúnmente se representa con la letra griega delta mayúscula:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

- El valor del discriminante determina la naturaleza de las soluciones.
  - Si $\Delta > 0$: dos soluciones reales distintas.
  - Si $\Delta = 0$: una única solución real.
  - Si $\Delta < 0$: no hay soluciones reales.

Ejemplos:

$x^2 - 5x + 6 = 0$

$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1}$

$\Delta = 25 - 24 = 1$

$x = \frac{5 \pm 1}{2}$

$x_1 = 3$

$x_2 = 2$

Dos soluciones reales

$x^2 - 4x + 4 = 0$

$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1}$

$\Delta = 16 - 16 = 0$

$x = \frac{4 \pm 0}{2} = \frac{4}{2}$

$x = 2$

Una solución real

$x^2 + x + 1 = 0$

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1}$

$\Delta = 1 - 4 = -3$

No hay soluciones reales

Ejercicios sobre ecuaciones cuadráticas

(1) Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas y en cada caso verificar que el resultado es correcto sustituyendo el valor obtenido en la ecuación.

(a) $x^2 - 7x + 12 = 0$

(b) $x^2 - 6x + 9 = 0$

(c) $\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{5}{2} = 0$

(d) $3x^2 + 2x - 1 = 0$

(e) $x^2 + 2x + 1 = 0$

(f) $x^2 + 4x - 5 = 0$

(g) $-x^2 - x + 6 = 0$

(h) $\frac{x}{x-2} = \frac{3x+1}{x+1}$

(i) $\frac{x+2}{x-3} = \frac{3x}{x+1}$

(j) $\frac{x+1}{x} = \frac{2x+3}{x+2}$

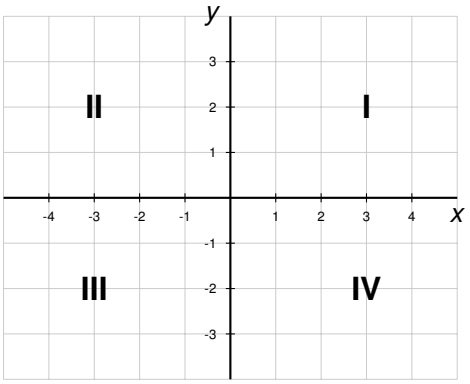
(k) $\sqrt{\frac{1}{x}} = x$

(l) $\sqrt{\frac{x+1}{x}} = 2$

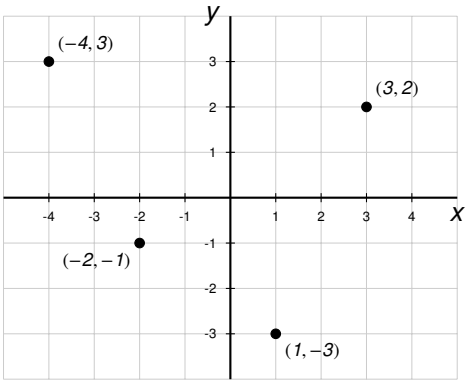
3. Funciones

3.1 Plano de coordenadas $\mathbb{R}^2$

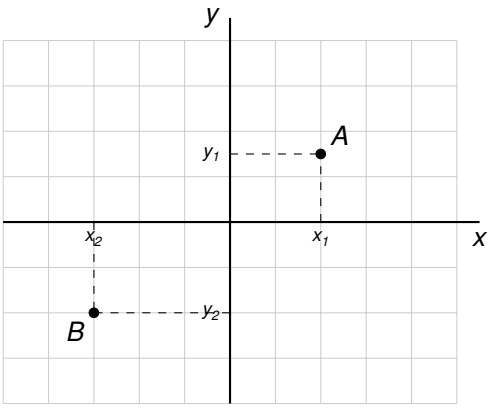
- Recordemos que $\mathbb{R}$ es el conjunto de todos los números reales y que lo representamos con la **recta numérica**, una línea infinita que se extiende hacia la izquierda y derecha del cero.
- Si necesitamos ubicar puntos sobre una superficie plana, en lugar de sobre una recta, necesitamos dos valores: uno para indicar la posición horizontal y otro para la vertical. Así llegamos al conjunto $\mathbb{R}^2$, que está formado por todos los **pares ordenados** (x, y) de números reales y que es un **espacio bidimensional**, también infinito.
- El espacio bidimensional $\mathbb{R}^2$ se representa por medio del **plano de coordenadas**, o **plano cartesiano**. El plano de coordenadas es una herramienta fundamental para representar gráficamente relaciones entre dos variables x e y. Está formado por dos rectas perpendiculares:
  - El **eje horizontal** o eje x (eje de las abscisas)
  - El **eje vertical** o eje y (eje de las ordenadas)
- El cruce de ambos ejes se llama **origen**.
- El plano se divide en cuatro **cuadrantes** que se denominan I, II, III y IV de acuerdo al siguiente esquema



- Cada **punto** del plano se representa mediante un **par ordenado** (x, y), donde x indica la posición horizontal e y indica la posición vertical. El origen es el punto $(0, 0)$.
- En el siguiente ejemplo se representan los puntos $(3, 2)$, $(-4, 3)$, $(-2, -1)$, y $(1, -3)$.



- En ocasiones no conocemos o no necesitamos especificar los valores numéricos exactos de un punto en el plano. En esos casos, podemos referirnos a un punto utilizando una letra, como el punto A y representar sus coordenadas de forma general como (x_1, y_1). Si hay otro punto, por ejemplo B, podemos escribir sus coordenadas como (x_2, y_2). Esta notación nos permite trabajar de manera simbólica y analizar situaciones generales.



Ejercicios sobre plano de coordenadas

(1) Ubicar los siguientes puntos en el plano de coordenadas y determinar en qué cuadrante se encuentran:

(a) $A = (5, 7)$ (d) $D = (7, -2)$ (g) $G = (3, -9)$

(b) $B = (-6, 4)$ **(e)** $E = (0, 6)$ **(h)** $H = (-7, -1)$

(c) $C = (-3, -8)$ **(f)** $F = (-9, 0)$ (i) $I = (0, 0)$

3.2 Funciones y su representación gráfica

- Una **función de una variable** es una regla que asigna a cada valor de entrada, generalmente representado por x, un único valor de salida que llamamos $f(x)$, o a veces más simplemente y.
- **Evaluar** una función consiste en calcular $f(x)$ para un valor específico de x.
- **Ejemplo 1:** La función f asigna a cada número real x su doble más uno.

  $$f(x) = 2x + 1$$

  Si ingresamos el número $x = 3$ (evaluamos la función en $x = 3$) obtenemos el número $f(3) = 2 \cdot 3 + 1 = 7$.
- Los valores de entrada y salida, x e y, son **variables** ya que pueden tomar muchos valores.
- En una función, la **variable independiente** es aquella que elegimos libremente, es decir x. La **variable dependiente** es el resultado que obtenemos al aplicar la regla de la función, es decir y o $f(x)$.
- El **dominio** de una función es el conjunto de todos los valores que puede tomar la variable independiente x para los cuales la función está definida.
- La **imagen** es el conjunto de todos los valores de salida que se obtienen al aplicar la función a los elementos del dominio, es decir, los posibles valores de $f(x)$.
- El **dominio natural de una fórmula** es el conjunto de todos los números reales para los que puede calcularse esa expresión. Cuando usamos la fórmula para representar una situación concreta, el contexto o el período que queremos estudiar pueden restringir ese conjunto y determinar el **dominio del modelo**.

  La **imagen depende del dominio elegido**: se obtiene considerando los valores que toma la función únicamente en ese dominio.
- En el ejemplo $f(x) = 2x + 1$, si tomamos como dominio el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales, la imagen es también el conjunto $\mathbb{R}$ ya que eligiendo el número adecuado, multiplicándolo por dos y sumándole uno, podemos obtener cualquier número real como resultado.
- ¿Por qué a veces usamos y y a veces $f(x)$ para representar los valores de salida de una función? La notación y se utiliza al enfatizar que estamos expresando una relación entre dos variables, la independiente x y la dependiente y. En cambio, cuando escribimos $f(x)$, enfatizamos que existe una función que actúa sobre el valor de entrada x aplicando una regla que produce un resultado.

- Aunque es común representar funciones y variables con x, $f(x)$ e y, podemos usar **cualquier letra o símbolo** para nombrar una función o variable.
- **Ejemplo 2:** Una pileta de 3.000 litros se vacía extrayendo agua con una bomba a razón constante de 500 litros por hora. El volumen de agua restante después de h horas está dado por la función:

  $$V(h) = 3.000 - 500h$$

  Después de 4 horas (evaluamos la función en $x = 4$), el volumen de agua restante en litros es $V(4) = 3.000 - 500 \cdot 4 = 1.000$.
- En este ejemplo, el dominio natural de la fórmula es $\mathbb{R}$, pero el dominio del modelo es el conjunto $[0, 6]$ ya que no tiene sentido considerar un número negativo de horas ($h < 0$), ni un número de horas tal que los volúmenes de agua obtenidos como resultado sean negativos ($h > 6$).

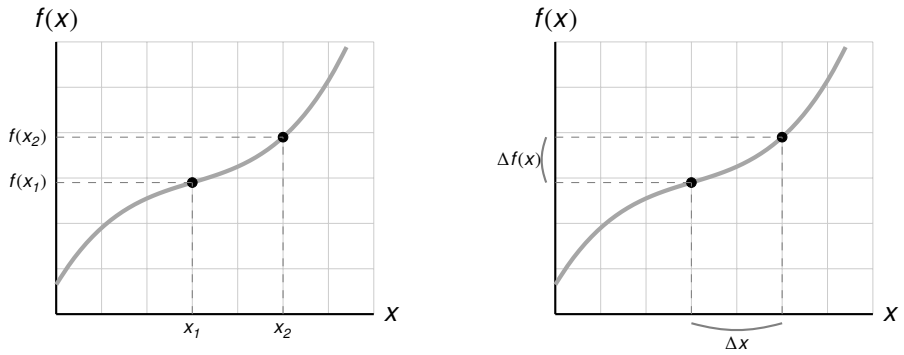
  La imagen es el conjunto $[0, 3000]$, ya que la situación inicial es $V(0) = 3.000$ y transcurridas 6 horas el volumen final es $V(6) = 0$.
- Es importante distinguir entre una variable y un **valor específico** de esa variable. Cuando queremos referirnos a valores específicos de las variables x e y, habitualmente usamos subíndices. Por ejemplo, x_1 y x_2 representan dos valores distintos de la variable x y sus correspondientes valores de la variable y se definen mediante evaluaciones de la función como $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$.
- También podemos calcular **cambios** en el valor de una función. Si la variable independiente cambia de x_1 a x_2, entonces la variable dependiente cambia de y_1 a y_2. Los cambios habitualmente se denotan con Delta mayúscula, de modo que $\Delta x = x_2 - x_1$ y $\Delta y = y_2 - y_1$.
- **Ejemplo 3:** Se invierte un capital inicial de 1.000 pesos a una tasa de interés anual de $0{,}05$. Al cabo de t años, el valor de la inversión más el interés se puede expresar utilizando la siguiente función de interés compuesto

  $$I(t) = 1.000(1 + 0{,}05)^t$$

  Nos interesa calcular el aumento que ocurriría en el valor de la inversión entre el tercer y cuarto año.

  $$I(3) = 1.000(1 + 0{,}05)^3 = 1.157{,}63$$
  $$I(4) = 1.000(1 + 0{,}05)^4 = 1.215{,}51$$
  $$\Delta I = I(4) - I(3) = 1.215{,}51 - 1.157{,}63 = 57{,}88$$

  Entre el tercer y cuarto año el valor de la inversión se incrementaría en 57,88 pesos.
- Una función puede **representarse en el plano cartesiano**, con la variable independiente x en el eje horizontal, y la variable dependiente $f(x)$ o y en el eje vertical.
- En el siguiente gráfico llamamos x y $f(x)$ a los ejes y representamos valores específicos x_1 y x_2.

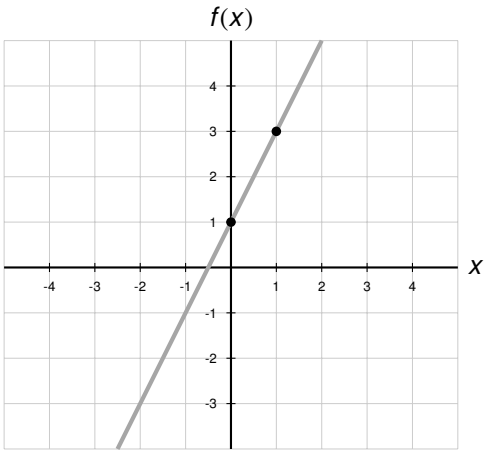


- Para graficar una función a partir de su expresión algebraica, un procedimiento inicial consiste en construir una **tabla** con algunos valores de la variable independiente x con sus correspondientes valores de salida $f(x)$. Luego, se representan los pares ordenados obtenidos en el plano cartesiano. Este método permite visualizar de manera básica el comportamiento de la función.
- Es importante comprender que el método de graficar mediante tabulaciones es rudimentario y limitado: si la función es compleja, puede requerir muchos puntos para captar su forma, y aun así no siempre revela todos sus rasgos importantes como puntos máximos, mínimos, de inflexión, y de discontinuidades. La tabla debe entenderse como una herramienta preliminar y aproximada.

- **Función lineal:** $f(x) = 2x + 1$

  Una función lineal se representa gráficamente mediante una recta. Puede graficarse sin tabulado a partir de su ecuación (lo discutiremos en la sección siguiente). En caso de hacerlo mediante tabulado, es suficiente con evaluar la función en dos puntos como en el siguiente ejemplo.

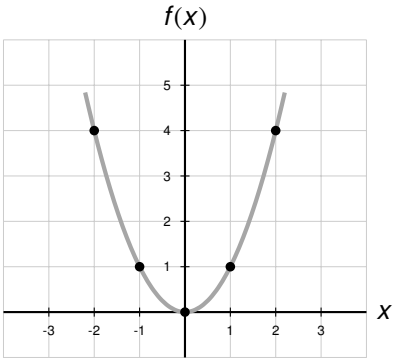
x	$f(x)$
0	1
1	3



- **Función cuadrática:** $f(x) = x^2$

  Una función cuadrática se representa gráficamente mediante una parábola. Puede graficarse sin tabulado a partir de su ecuación canónica (no la hemos discutido). En este caso vemos un ejemplo con tabulado.

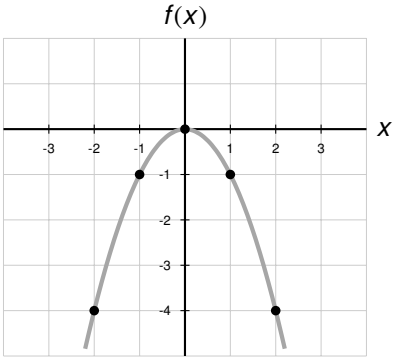
x	$f(x)$
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4



- **Función cuadrática negativa:** $f(x) = -x^2$

  Si el coeficiente de la variable elevada el cuadrado es negativo (en este ejemplo es -1), la parábola se invierte.

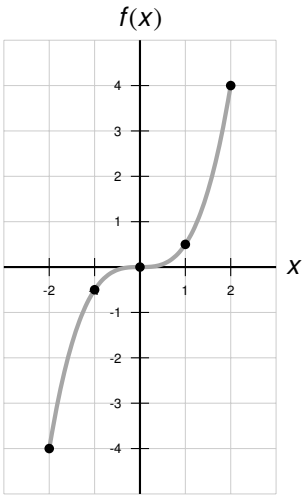
x	$f(x)$
-2	-4
-1	-1
0	-0
1	-1
2	-4



- **Función cúbica:** $f(x) = \frac{1}{2}x^3$

  La función cúbica tiene un punto de inflexión (en este ejemplo ese punto está en el origen), que marca un cambio de cóncava a convexa (estas propiedades se definen en la siguiente sección).

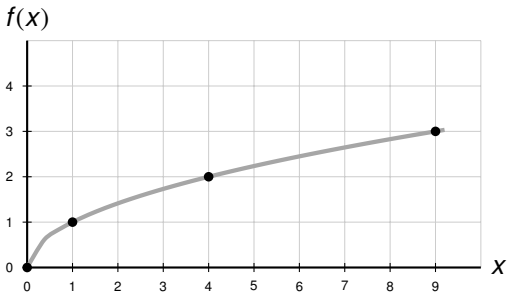
x	$f(x)$
-2	-4
-1	-0,5
0	0
1	0,5
2	4



- **Función raíz cuadrada:** $f(x) = \sqrt{x}$

  El dominio de la función raíz cuadrada son los reales no negativos, ya que la raíz cuadrada no tiene solución real para números negativos.

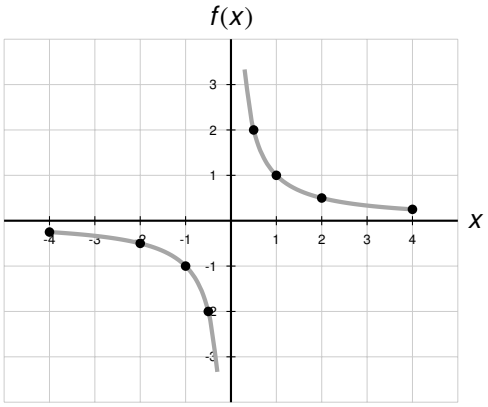
x	$f(x)$
0	0
1	1
4	2
9	3



- **Función inversa:** $f(x) = \frac{1}{x}$

  El dominio de la función inversa son los reales excepto el cero. Su representación gráfica es una hipérbola.

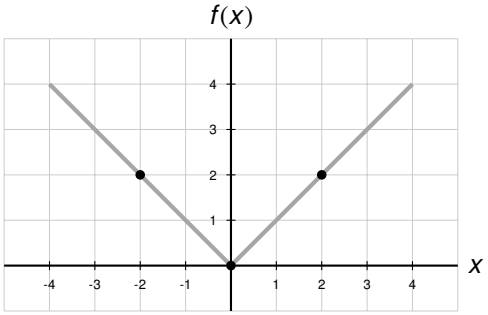
x	$f(x)$
-4	-0,25
-2	-0,5
-1	-1
-0,5	-2
0,5	2
1	1
2	0,5
4	0,25



- **Función valor absoluto:** $f(x) = |x|$

  La función valor absoluto se representa con dos rectas.

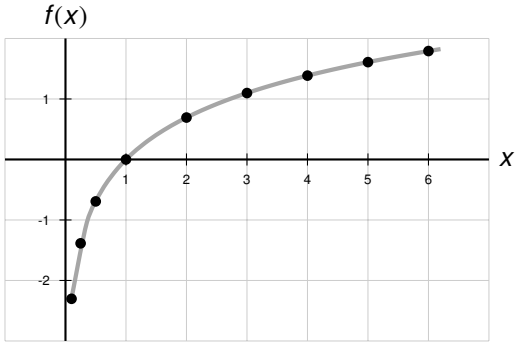
x	$f(x)$
-2	2
0	0
2	2



- **Función logarítmica:** $f(x) = \ln(x)$

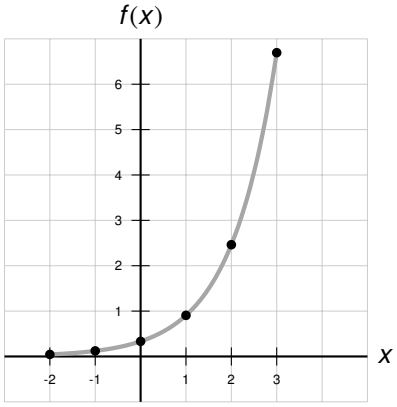
  El dominio de la función logarítmica son los reales estrictamente positivos ('estrictamente' significa que no se incluye el cero).

x	$f(x)$
0,1	-2,303
0,25	-1,386
0,5	-0,693
1	0
2	0,693
3	1,098
4	1,386
5	1,609
6	1,792



- **Función exponencial:** $f(x) = \frac{1}{3}e^x$

x	$f(x)$
-2	0,045
-1	0,123
0	0,333
1	0,906
2	2,463
3	6,695



Ejercicios sobre funciones

(1) Se coloca una botella de agua en la heladera. Durante las primeras 8 horas, su temperatura se modela aproximadamente mediante la fórmula $T(t) = 20 - 2t$, donde t es el tiempo transcurrido desde que se coloca la botella, medido en horas, y $T(t)$ es la temperatura, medida en grados Celsius. En este problema, el modelo se utiliza únicamente desde el momento inicial hasta las 8 horas, inclusive, y se consideran también tiempos no enteros.

(a) ¿Cuál es el dominio natural de la fórmula, es decir, el conjunto de valores reales de t para los que puede calcularse $20 - 2t$, sin considerar el contexto?

(b) ¿Cuál es el dominio del modelo durante el período considerado? ¿Cuál es su imagen? Expresar ambos conjuntos como intervalos y justificar la respuesta.

(c) ¿Qué temperatura predice el modelo después de 5 horas?

(d) ¿Las 10 horas pertenecen al dominio natural de la fórmula? ¿Pertenecen al dominio del modelo de este problema? Explicar la diferencia.

(2) Un taxi cobra 200 pesos de bajada de bandera más 50 pesos por kilómetro recorrido. El valor del viaje está dado por $P(x) = 200 + 50x$. Determinar el dominio y la imagen de la función. ¿Cuánto cuesta un viaje de 6 kilómetros?

(3) La población de una colonia de bacterias crece según la función $P(t) = 100 + 20t^2$, donde t es el tiempo en horas. Determinar el dominio y la imagen de la función. ¿Cuántas bacterias hay después de 5 horas?

(4) El costo de mantenimiento de una máquina está dado por $M(a) = 2a^3 - 15a^2 + 40a + 100$, donde a es la antigüedad en años. Determinar el dominio y la imagen de la función. ¿Cuál es el costo cuando la máquina tiene 5 años?

(5) Una planta crece en altura según la función $h(t) = 10 + 1{,}5t$, donde t es el número de semanas desde que fue sembrada y $h(t)$ es la altura medida en centímetros. Determinar el dominio y la imagen de la función. ¿Cuánto crece la planta entre la semana 2 y la semana 6?

(6) El costo total de una excursión es de 2.000 pesos, dividido entre la cantidad de personas, de manera que la función de costo por persona es $C(n) = \frac{2.000}{n}$. Determinar el dominio y la imagen de la función.

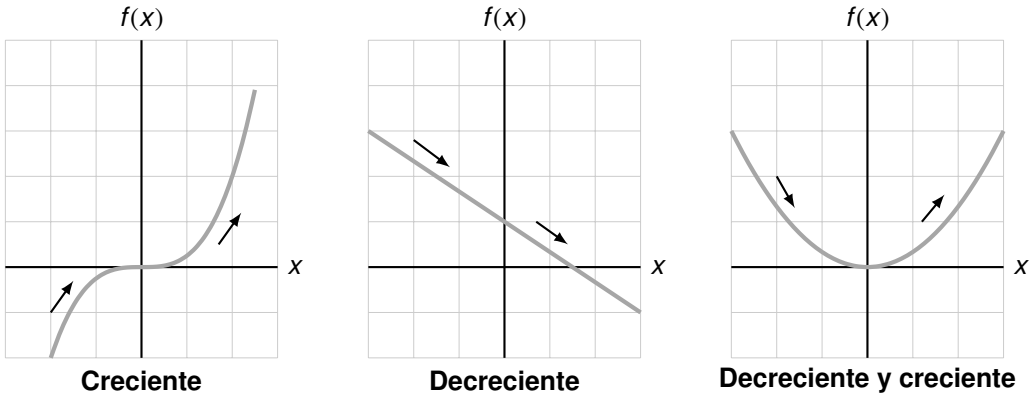
Un total de 5 personas van a ir a la excursión y están considerando invitar a 2 personas más ¿En cuántos pesos disminuiría el costo por persona si deciden invitar a esas dos personas adicionales?

(7) El valor de un celular, medido en pesos, disminuye según la función $V(t) = 120.000 - 9.000t$, donde t es el tiempo transcurrido desde la compra, medido en meses. El modelo se utiliza desde la compra hasta que el valor del celular llega a cero. Determinar el dominio y la imagen del modelo. ¿Qué porcentaje del valor inicial se pierde luego de 6 meses?

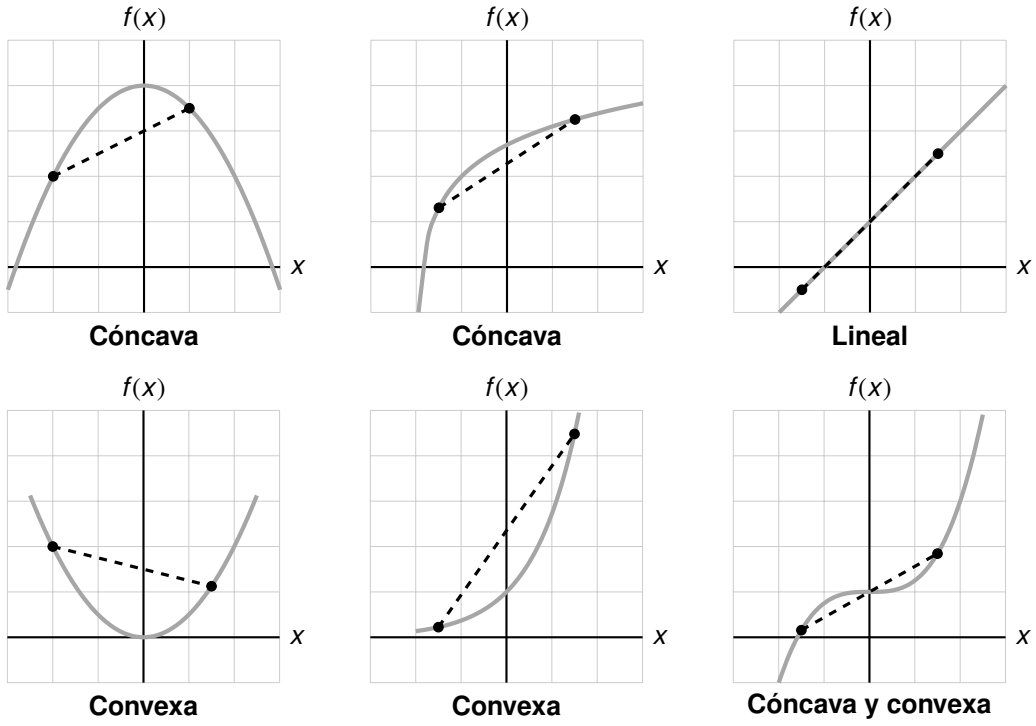
(8) Una pelota se lanza al aire. Su altura sobre el suelo, medida en metros, está dada por $h(t) = -5t^2 + 20t + 2$, donde t es el tiempo transcurrido desde el lanzamiento, medido en segundos. Se estudia el movimiento desde el lanzamiento hasta que la pelota toca el suelo. Determinar el dominio y la imagen del modelo. ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la pelota?

3.3 Propiedades de las funciones

- Una función f es **creciente**, cuando a mayores valores de x corresponden mayores valores de $f(x)$.
- Una función f es **decreciente**, cuando a mayores valores de x corresponden menores valores de $f(x)$.
- Una función puede tener tramos crecientes y tramos decrecientes.



- Una función es **cóncava** cuando al tomar dos puntos cualquiera sobre la función, el segmento que los une está por debajo de la curva. En algunos textos se llama a estas funciones cóncavas hacia abajo.
- Una función es **convexa** cuando al tomar dos puntos cualquiera sobre la función, el segmento que los une está por encima de la curva. En algunos textos se llama a estas funciones cóncavas hacia arriba.
- Una función es **lineal** (una recta) cuando al tomar dos puntos cualquiera sobre la función, el segmento que los une coincide con la función.
- Una función puede tener tramos convexos, cóncavos y lineales.



- ¿Cuál es la **diferencia entre un polinomio y una función**? Una función es, formalmente, una relación entre conjuntos que asigna a cada elemento x del conjunto de partida un único elemento $f(x)$ del conjunto de llegada. En los ejemplos anteriores, los conjuntos considerados son los números reales o los reales positivos. Un polinomio es una expresión algebraica compuesta por la suma de términos con potencias enteras no negativas de una variable. Cuando se interpreta como una regla que asigna un valor de salida a cada valor de entrada, el polinomio define una función: una función polinómica. Las funciones lineales, cuadráticas y cúbicas son funciones polinómicas. La noción de función es más amplia que la de polinomio, ya que incluye otras formas como funciones inversas, logarítmicas, exponenciales o trigonométricas. Por lo tanto, todo polinomio puede representar una función, pero no toda función puede expresarse como un polinomio.
- ¿Cuál es la **diferencia entre una ecuación y una función**? Una función es una relación entre conjuntos, y puede representarse de diversas maneras: verbalmente, mediante una tabla de valores, un gráfico, o una expresión algebraica. Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebraicas. Su propósito puede ser resolver una incógnita, que fue la manera en que enfocamos el estudio de ecuaciones en el capítulo anterior, o bien expresar una relación matemática entre variables, como ocurre cuando se representa una función mediante una ecuación. Sin embargo, no toda ecuación representa una función: por ejemplo, la ecuación de una circunferencia unitaria ($x^2 + y^2 = 1$) no define una función, ya que para ciertos valores de la variable x existen múltiples valores de la variable y.

Ejercicios sobre funciones

(1) Para cada una de las siguientes funciones:

- Construir una tabla evaluando la función en varios puntos. Recordar que para una función lineal es suficiente evaluar la función en dos puntos.
- Graficar en el plano de coordenadas
- Determinar los tramos en los que la función es creciente, decreciente o constante (no hace falta encontrar los límites exactos entre tramos)
- Determinar los tramos en los que la función es cóncava, convexa o lineal (no hace falta encontrar los límites exactos entre tramos)
- Se puede utilizar la calculadora gráfica de Geogebra para verificar la forma de los gráficos.

(a) $f(x) = -3 + \frac{1}{2}x$

(b) $f(x) = 10 - \frac{1}{4}x^2$

(c) $f(x) = 1 + \left(\frac{1}{2}x - 2\right)^2$

(d) $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 5$

(e) $f(x) = 4$

(f) $f(x) = \sqrt{100 - 10x}$

3.4 Funciones lineales

- Una **función lineal** se representa gráficamente mediante una recta y tiene la forma general

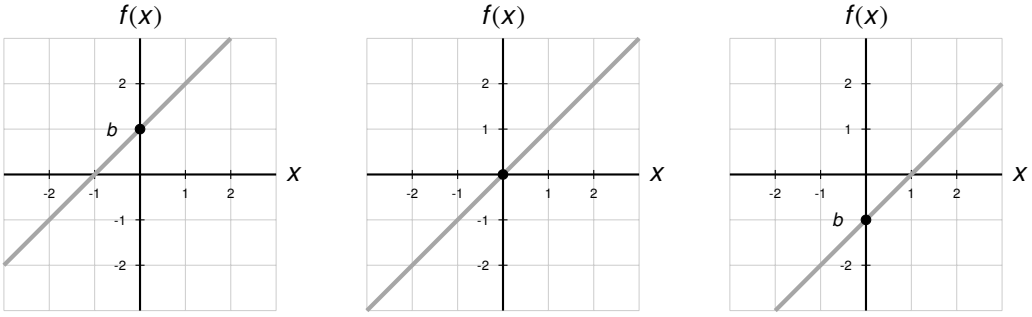
$$f(x) = b + mx$$

donde b es la **ordenada al origen** y m es la **pendiente**.

- La ordenada al origen b representa la **intersección con el eje vertical** ya que es el valor de la función cuando $x = 0$.

$$f(0) = b + m \cdot 0 = b$$

- La ordenada al origen puede ser positiva, cero, o negativa. En los siguientes tres ejemplos $b = 1$, $b = 0$ y $b = -1$.



$b = 1$ $b = 0$ $b = -1$

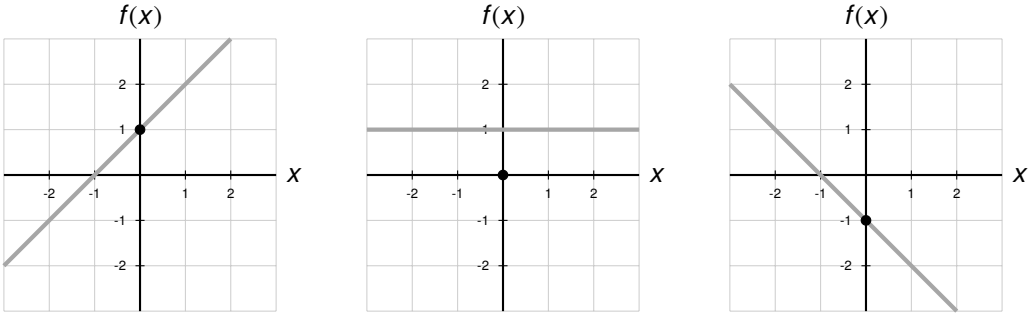
- Cuando la ordenada al origen de una función lineal es cero, la función se escribe como

$$f(x) = mx$$

y cuando m es positiva se establece una relación directamente proporcional entre las variables, donde m es la constante de proporcionalidad.

- La pendiente es la **inclinación** de la recta. Si m es positiva la función es creciente, mientras que si m es negativa la función es decreciente. Si m es cero, la función es constante (horizontal).

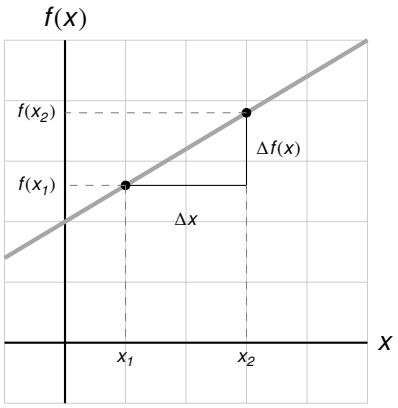
- En los siguientes tres ejemplos $m = 1$, $m = 0$ y $m = -1$.



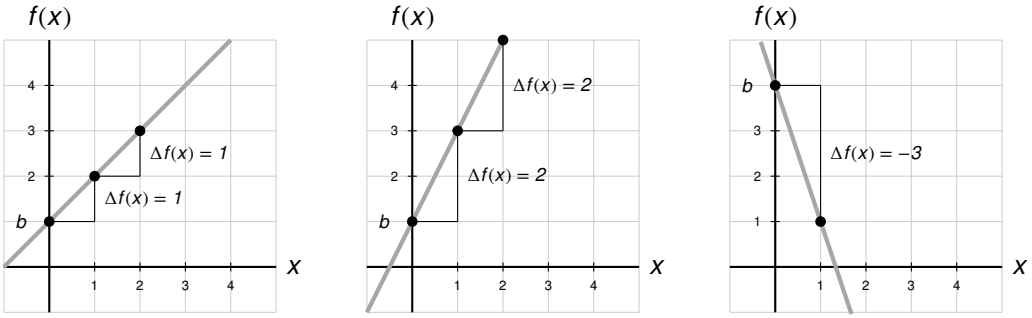
$m = 1$ $m = 0$ $m = -1$

- La pendiente puede interpretarse como la **razón de cambio** entre los valores de una función. Si tomamos dos puntos sobre la recta $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$ con distinta coordenada x, el cambio en $f(x)$ dividido el cambio en x es igual a la pendiente.

$$m = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \qquad x_1 \neq x_2$$



- La expresión $\Delta f(x)/\Delta x$ representa la razón de cambio en cualquier función. En una función lineal la **pendiente es constante**: no importa qué dos puntos elijamos, el valor de m siempre es el mismo.
- En los siguientes ejemplos las pendientes de las rectas son $m = 1$, $m = 2$ y $m = -3$. Se grafican incrementos en x dados por $\Delta x = 1$, y sus correspondientes cambios en $f(x)$, iguales a $\Delta f(x) = 1$, $\Delta f(x) = 2$ e $\Delta f(x) = -3$.



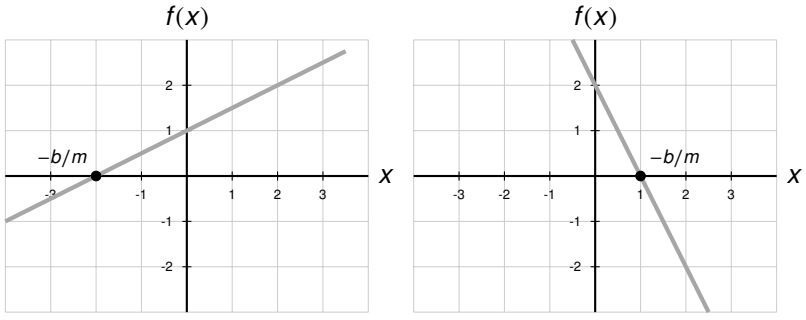
$m = 1$ $\quad$ $m = 2$ $\quad$ $m = -3$

- En algunos casos, para graficar una función es útil encontrar la **intersección con el eje horizontal**. Esto ocurre cuando el valor de la función es cero, $f(x) = 0$. Si $m \neq 0$, la intersección se obtiene resolviendo

$$b + mx = 0$$
$$mx = -b$$
$$x = -\frac{b}{m}$$

  Si $m = 0$, la función es constante: cuando $b \neq 0$, su gráfico no corta el eje horizontal; cuando $b = 0$, coincide con ese eje.

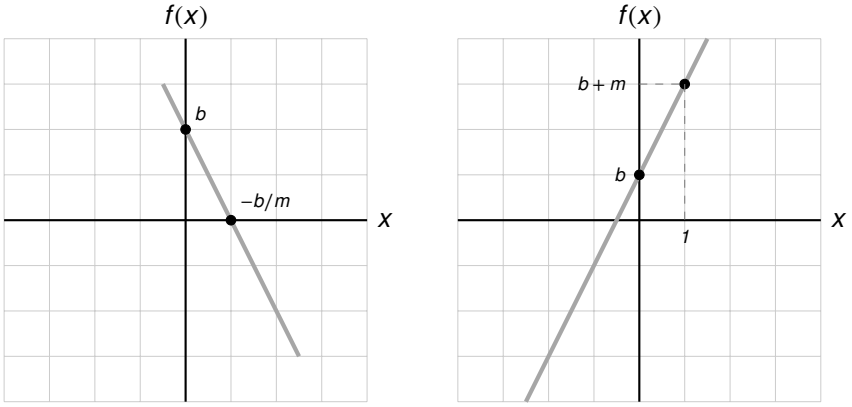
- En los siguientes dos ejemplos la intersección con el eje horizontal es negativa en el primer caso y positiva en el segundo



- **Graficar una función lineal a partir de su expresión algebraica** es sencillo ya que solamente se necesitan dos puntos distintos que se unen con una recta. Las opciones más simples son:

- Si $m \neq 0$ y $b \neq 0$, utilizar los cortes con los ejes: $(0, b)$ y $(-b/m, 0)$.
- En todos los casos, se pueden utilizar los puntos $(0, b)$ y $(1, b + m)$.

Si $b = 0$ y $m \neq 0$, los dos cortes con los ejes coinciden en $(0, 0)$ y no proporcionan dos puntos distintos. En ese caso, la segunda opción permite utilizar $(0, 0)$ y $(1, m)$.



- Así como podemos graficar una función lineal con solo dos puntos que obtenemos a partir de su expresión algebraica, también podemos hacer el camino inverso; podemos **reconstruir la ecuación de una recta** a partir de las siguientes situaciones:
  - Si conocemos su pendiente y un punto cualquiera sobre la recta
  - Si conocemos dos puntos de la recta con distinta coordenada x

  Dos puntos distintos con la misma coordenada x determinan una recta vertical. Su pendiente no está definida y esa recta no representa una función $y = f(x)$, porque a un mismo valor de x le corresponden varios valores de y.
- Para discutir esto en más detalle introducimos un **cambio de notación** y utilizamos y en lugar de $f(x)$ para la variable de salida. Sean dos valores distintos de x, x_1 y x_2, y sus correspondientes valores de $f(x)$, dados por $y_1 = f(x_1)$ y $y_2 = f(x_2)$. En este contexto, definimos la pendiente m como $m = \Delta y/\Delta x = \Delta f(x)/\Delta x$.
- Consideremos una situación en la que conocemos un punto (x_1, y_1) sobre la recta y su pendiente m. Dado que la pendiente es la razón de cambio, sabemos que cualquier punto (x, y) de la recta con $x \neq x_1$ satisface

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_1}{x - x_1}, \qquad x \neq x_1$$

Despejando obtenemos la ecuación:

$$\begin{aligned} m &= \frac{y - y_1}{x - x_1} \qquad (x \neq x_1) \\ m(x - x_1) &= y - y_1 \\ y &= y_1 + m(x - x_1) \\ y &= \underbrace{(y_1 - mx_1)}_{b} + mx \end{aligned}$$

donde la ordenada al origen es $b = y_1 - mx_1$. Es importante notar que y_1, x_1 y m son valores fijos, no variables, por lo tanto b también lo es. Por el contrario x e y, sin subíndices, representan variables.

La ecuación obtenida, $y = y_1 + m(x - x_1)$, también es válida cuando $x = x_1$: al reemplazar, resulta $y = y_1$, por lo que incluye el punto de partida.

Ejemplo: sabemos que una recta tiene pendiente 2 y que pasa por el punto $(1, 3)$. A partir de esa información recuperamos la ecuación como

$$\begin{aligned} y &= (y_1 - mx_1) + mx \\ y &= (3 - 2 \cdot 1) + 2x \\ y &= 1 + 2x \end{aligned}$$

- Consideremos ahora una situación en la que conocemos dos puntos sobre la recta: (x_1, y_1) y (x_2, y_2), con $x_1 \neq x_2$. A partir de los dos puntos podemos obtener la pendiente como

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \qquad x_1 \neq x_2$$

Una vez obtenida la pendiente aplicamos la fórmula de la situación anterior utilizando indistintamente (x_1, y_1) o (x_2, y_2).

$$y = (y_1 - mx_1) + mx$$

Ejemplo: sabemos que una recta pasa por los puntos (-2,1) y (0,-3). A partir de esa información primero recuperamos la pendiente como

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ m &= \frac{-3 - 1}{0 - (-2)} \\ m &= \frac{-4}{2} \\ m &= -2 \end{aligned}$$

Luego aplicamos la ecuación utilizando cualquiera de los dos puntos. Elegimos el primero.

$$\begin{aligned} y &= (y_1 - mx_1) + mx \\ y &= (1 - (-2) \cdot (-2)) - 2x \\ y &= -3 - 2x \end{aligned}$$

Ejercicios sobre funciones lineales

(1) Graficar las siguientes funciones lineales a partir de su ecuación, sin utilizar una tabla con valores.

(a) $f(x) = 2x + 3$
(b) $f(x) = -x + 1$
(c) $f(x) = 0{,}5x - 4$
(d) $f(x) = -3x + 2$
(e) $f(x) = -2x$
(f) $f(x) = 4x - 5$
(g) $f(x) = -0{,}5x + 6$
(h) $f(x) = 3x$
(i) $f(x) = -x - 2$

(2) Escribir la ecuación y graficar las correspondientes funciones lineales a partir de la siguiente información

(a) Pasa por el origen y su pendiente es 4.
(b) Su ordenada al origen es 2 y pasa por el punto $(3, 5)$.
(c) Tiene pendiente -1 y pasa por el punto $(4, 2)$.
(d) Pasa por los puntos $(1, -2)$ y $(3, 2)$.
(e) Su intersección con el eje horizontal es $x = 5$ y su pendiente es -2.
(f) Pasa por el origen y por el punto $(2, -3)$.
(g) Pasa por los puntos $(-1, 1)$ y $(2, -5)$.

(3) Para cada una de las siguientes rectas y valores x_1 y x_2 que se detallan más abajo, calcular:

- $f(x_2) - f(x_1)$
- $\Delta f(x) = m \cdot \Delta x$

Verificar que en cada inciso ambos resultados son iguales. Cuando x o $f(x)$ disminuyen se expresan como un cambio con signo negativo.

(a) $f(x) = 2x + 1$, con $x_1 = 3$ y $x_2 = 7$.
(b) $f(x) = -x + 4$, con $x_1 = 5$ y $x_2 = -2$.
(c) $f(x) = 0{,}5x - 3$, con $x_1 = 0$ y $x_2 = 6$.
(d) $f(x) = -2x + 5$, con $x_1 = 4$ y $x_2 = 1$.

3.5 Interpretación gráfica de la solución de ecuaciones

- Ahora que comprendemos como graficar funciones podemos utilizar esta herramienta para **graficar la solución de una ecuación**.

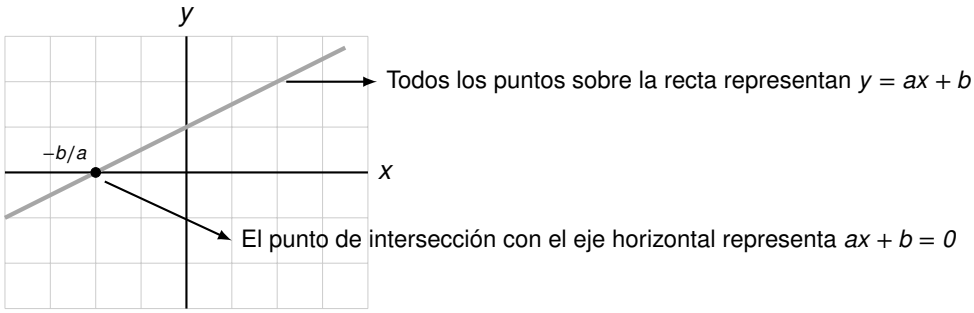
- **Ecuación lineal**. Consideremos una función lineal con pendiente a y ordenada al origen b dada por

$$y = ax + b$$

Consideremos también la forma general de una ecuación lineal, como estudiamos en el capítulo anterior

$$ax + b = 0$$

Vemos que la ecuación planteada es una caso particular de la función lineal en el que $y = 0$. Si resolvemos la ecuación obtenemos la solución $x = -b/a$. Dado que la solución corresponde al caso $y = 0$, gráficamente es la intersección con el eje horizontal.



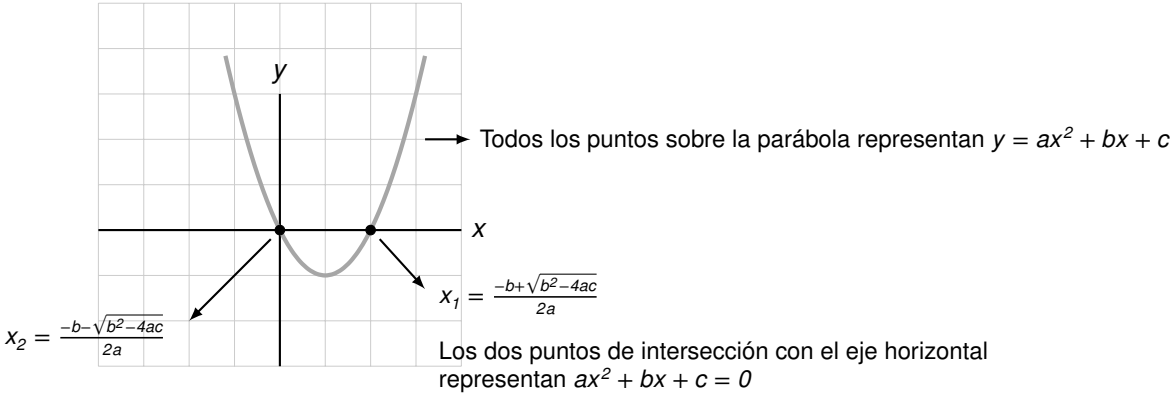
- **Ecuación cuadrática**. De manera análoga al caso lineal, consideremos ahora una función cuadrática dada por

$$y = ax^2 + bx + c$$

Consideremos también la forma general de una ecuación cuadrática

$$ax^2 + bx + c = 0$$

La ecuación planteada es una caso particular de la función cuadrática en el que $y = 0$. Podemos obtener las soluciones aplicando la Regla de Bhaskara $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Gráficamente, las soluciones corresponden a la intersección de la parábola con el eje horizontal.

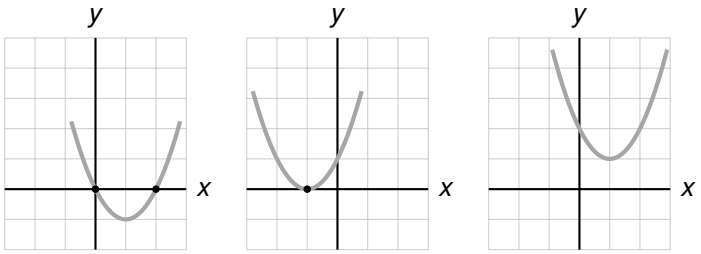


- **Número de soluciones de una ecuación cuadrática**. Recordemos que el número de soluciones de una ecuación cuadrática depende de su discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$, con los siguientes casos:

  - Si $\Delta > 0$: dos soluciones reales distintas.
  - Si $\Delta = 0$: una única solución real.

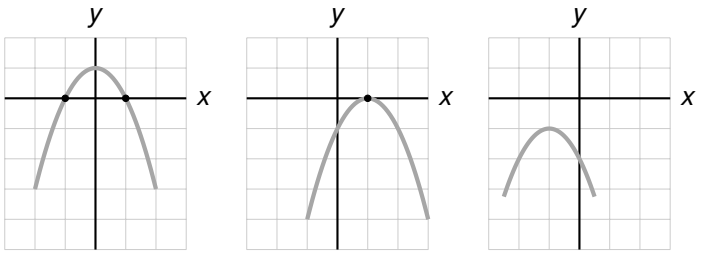
- Si $\Delta < 0$: no hay soluciones reales.

Estos casos se corresponden con dos, una o ninguna intersección en el eje horizontal, como se expone en los siguientes ejemplos.



$\Delta > 0$ $\Delta = 0$ $\Delta < 0$

Si el coeficiente del término cuadrático es negativo ($a < 0$) la parábola se invierte, y también se da lugar a tres situaciones dependiente del signo del discriminante. En los siguientes ejemplos $a < 0$.



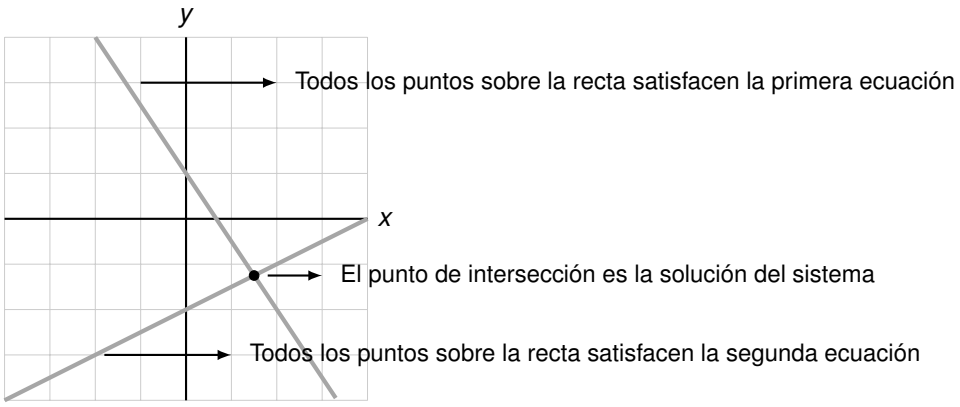
$\Delta > 0$ $\Delta = 0$ $\Delta < 0$

- **Sistema de ecuaciones lineales**. Consideremos ahora el siguiente sistema de dos ecuaciones lineales en dos incógnitas, x e y.

$$y = ax + b$$
$$y = cx + d$$

En el plano cartesiano, el sistema representa las ecuaciones de dos rectas. Los parámetros a y c son las pendientes de cada recta, y los parámetros b y d las ordenadas al origen.

Gráficamente, cuando las dos rectas se cortan en un único punto, la solución del sistema de ecuaciones es la **intersección entre las dos rectas**, como se muestra en el siguiente ejemplo.

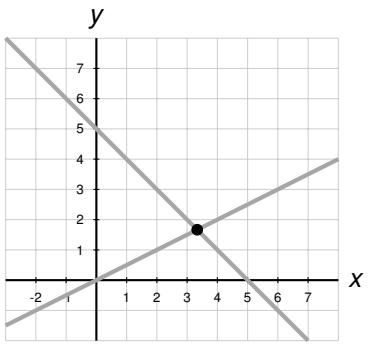


- Notar que hay infinitos valores de x e y que satisfacen la primera ecuación, e infinitos valores de x e y que satisfacen la segunda ecuación. Pero, en este ejemplo, solamente hay un par de valores de x e y que satisface ambas ecuaciones simultáneamente. Este par se corresponde con la intersección de las dos rectas.

- Consideremos uno de los sistemas de ecuaciones del capítulo anterior. Reescribimos las ecuaciones despejando la variable y del lado izquierdo

$$\begin{cases} x + y = 5 \to y = 5 - x \\ x = 2y \to y = 1/2x \end{cases}$$

Podemos graficar las dos ecuaciones del sistema a partir de su ordenada al origen y su pendiente. La primera recta pasa por el punto $(0, 5)$ y tiene pendiente (-1). La segunda recta pasa por el punto $(0, 0)$ y tiene pendiente $1/2$. La solución de este sistema, que obtuvimos en el capítulo anterior, es $x = 10/3$, $y = 5/3$. Verificamos gráficamente que la solución es efectivamente la intersección de las dos rectas.



- Aclaración: si en un sistema de ecuaciones las dos rectas son paralelas con distinta ordenada al origen, las rectas nunca se cortan y el sistema no tiene solución (ni gráfica ni algebraica).
- Aclaración: si las dos rectas coinciden, todos los puntos de esa recta satisfacen simultáneamente ambas ecuaciones. En ese caso, el sistema tiene infinitas soluciones.

Ejercicios sobre solución de sistemas de ecuaciones

(1) Graficar los siguientes sistemas de ecuaciones lineales (de los ejercicios del capítulo anterior) y verificar que la intersección de las rectas es la solución del sistema.

(a) $\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ x - y = 1 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 4x - y = 5 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases}$

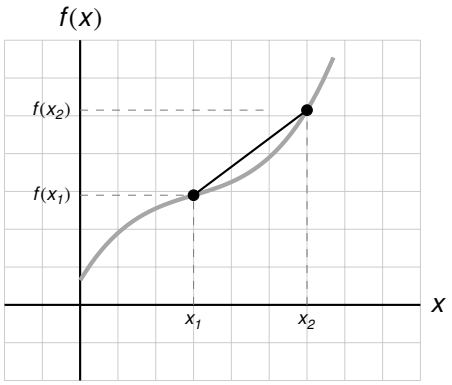
(c) $\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 4 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 3x + 2y = 16 \\ 5x - y = 9 \end{cases}$

3.6 Razón de cambio de una función

- En una función lineal, la pendiente está determinada directamente por su ecuación. Esta tasa indica cuánto varía $f(x)$ por cada unidad que varía x, y puede visualizarse como la inclinación de la recta.
- En el caso de una función no lineal, al no ser una recta, utilizamos la **recta secante** que conecta dos puntos sobre la curva $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$ para calcular y visualizar gráficamente la **tasa media de cambio entre** x_1 **y** x_2, con $x_1 \neq x_2$. La pendiente de esta recta es

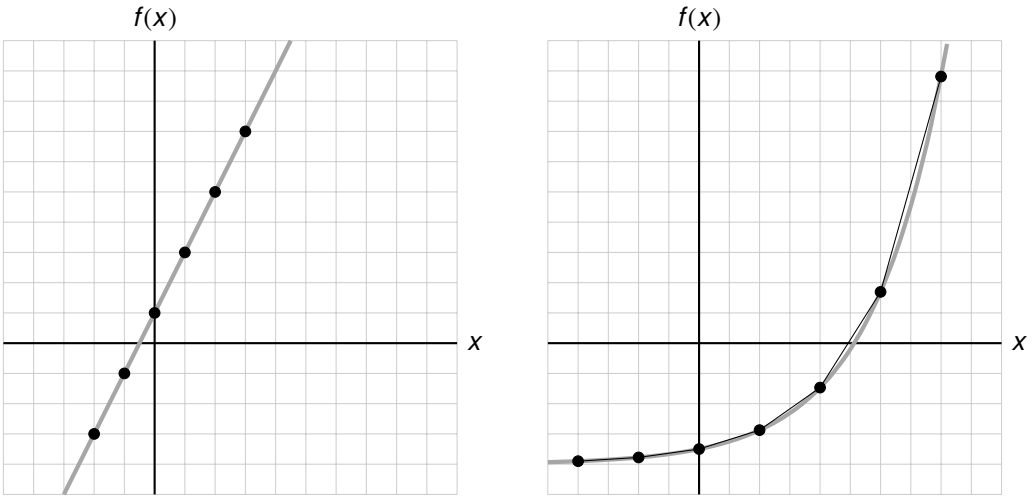
$$\text{Pendiente de la secante} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$



- Ejemplo: para la función $f(x) = x^3 - 3x$ calculamos la tasa media de cambio entre $x = 2$ y $x = 3$.
  - Evaluamos la función en $x = 2$: $f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2 = 8 - 6 = 2$. El primer punto es: $(x_1, f(x_1)) = (2, 2)$.
  - Evaluamos la función en $x = 3$: $f(3) = 3^3 - 3 \cdot 3 = 27 - 9 = 18$. El segundo punto es: $(x_2, f(x_2)) = (3, 18)$.
  - Calculamos la tasa media de cambio entre $x = 2$ y $x = 3$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{18 - 2}{3 - 2} = 16$$

- En una función lineal, la razón de cambio $\Delta f(x)/\Delta x$ **es constante**. Esto significa que, a lo largo de toda la recta, cada vez que x aumenta en un valor Δx, $f(x)$ varía en un valor fijo $\Delta f(x)$.
- En una función no lineal, la razón de cambio $\Delta f(x)/\Delta x$ **no es constante** y la inclinación de la recta secante depende del intervalo considerado.

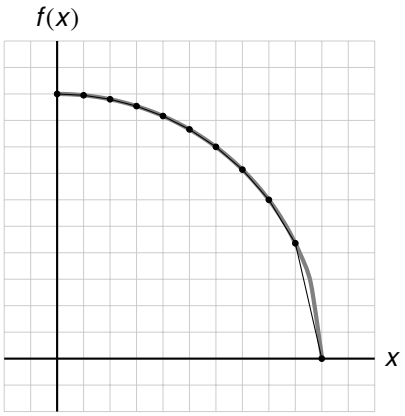


Función lineal **Función no lineal**

- Ejemplo: Para la función $f(x) = \sqrt{100 - x^2}$ buscamos evaluar la tasa media de cambio en intervalos entre valores consecutivos de x.
  - Armamos una tabla con valores de x que van desde cero hasta 10
  - Evaluamos la función en cada uno de los valores de x y completamos la columna de $f(x)$
  - Graficamos la función a partir de los puntos obtenidos.
  - Para cada línea de la tabla calculamos las variaciones $\Delta x = x_2 - x_1$ y $\Delta f(x) = f(x_2) - f(x_1)$ restando la línea anterior (para la primera línea no se puede calcular variación).
  - A partir de la segunda fila, calculamos la tasa media de cambio entre $x - 1$ y x como el cociente de las variaciones en $f(x)$ y en x.
  - Encontramos que la razón de cambio es negativa, ya que cuando x aumenta $f(x)$ disminuye. En el gráfico vemos que la pendiente es negativa (la función es decreciente).

- Encontramos que al aumentar x aumenta la razón de cambio (en valor absoluto). En el gráfico vemos que cuando $x = 0$ la curva es plana y que al movernos hacia la derecha (valores más altos de x), la inclinación de la curva se va haciendo mayor (en valor absoluto), en el sentido de que "cae" cada vez más rápido.

x	$f(x)$	$x_2 - x_1$	$f(x_2) - f(x_1)$	$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$
0	10	–	–	–
1	9,95	1 – 0	9,95 – 10	−0,05
2	9,80	2 – 1	9,80 – 9,95	−0,15
3	9,54	3 – 2	9,54 – 9,80	−0,26
4	9,17	4 – 3	9,17 – 9,54	−0,37
5	8,66	5 – 4	8,66 – 9,17	−0,51
6	8	6 – 5	8 – 8,66	−0,66
7	7,14	7 – 6	7,14 – 8	−0,86
8	6	8 – 7	6 – 7,14	−1,14
9	4,36	9 – 8	4,36 – 6	−1,64
10	0	10 – 9	0 – 4,36	−4,36



Ejercicios sobre tasas de cambio

(1) Para cada una de las siguientes funciones y valores de x, determinar la pendiente de la recta secante entre ambos puntos.

(a) $f(x) = x^2$, entre $x = 1$ y $x = 3$

(b) $f(x) = x^3$, entre $x = -1$ y $x = 2$

(c) $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$, entre $x = 0$ y $x = 4$

(d) $f(x) = x^4 - x^2$, entre $x = -2$ y $x = 2$

(e) $f(x) = -x^3 + 4x$, entre $x = 1$ y $x = 3$

(f) $f(x) = \frac{1}{x}$, entre $x = 1$ y $x = 2$

(g) $f(x) = x^5 - 2x^3 + x$, entre $x = -1$ y $x = 1$

(h) $f(x) = 3x^2 + x - 5$, entre $x = 2$ y $x = 5$

(2) Sea la función $f(x) = \sqrt{25 - x^2} - 1$. Queremos evaluar la tasa media de cambio entre $x - 1$ y x, para $x \in \{1; 2; 3; 4\}$, con una variación $\Delta x = 1$. Armar una tabla con los valores de x (agregar el 0) y los correspondientes valores de $f(x)$, y a partir de ella graficar la función y calcular las tasas medias de cambio. Cada fila, salvo la primera, compara el valor de la función en x con su valor en $x - 1$.

(3) Sea la función $f(x) = 10/x$. Queremos evaluar la tasa media de cambio entre $x - 1$ y x, para $x \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, con una variación $\Delta x = 1$. Armar una tabla con los valores de x (agregar el 1) y los correspondientes valores de $f(x)$, y a partir de ella graficar la función y calcular las tasas medias de cambio. Cada fila, salvo la primera, compara el valor de la función en x con su valor en $x - 1$.

4. Proporcionalidad y porcentajes

4.1 Proporcionalidad

- La proporcionalidad describe una **relación constante** entre dos magnitudes.
- Dos magnitudes son **directamente proporcionales** cuando, al aumentar una de ellas, la otra también aumenta en la misma proporción. Es decir, **el cociente entre ambas magnitudes permanece constante**. En términos formales, dos variables x e y son directamente proporcionales si y solo si existe una constante k tal que

$$\frac{y}{x} = k, \qquad x \neq 0$$

- Cuando dos magnitudes son directamente proporcionales podemos utilizar la **regla de tres simple** para resolver problemas.

  Ejemplo: Si 3 lápices cuestan $\$90$, ¿cuánto cuestan 5 lápices?

$$\begin{array}{cc} \text{Cantidad} & \text{Valor} \\ 3 & 90 \\ 5 & a \end{array} \quad \Rightarrow a = \frac{90 \cdot 5}{3} = 150$$

  Verificación: notemos que se forman dos fracciones equivalentes. Decimos que "90 es a 3 como 150 es a 5".

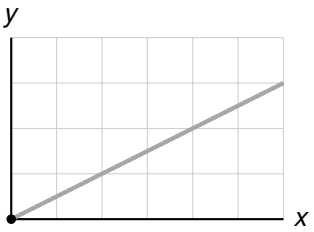
$$\frac{90}{3} = \frac{150}{5} = 30$$

  En este ejemplo la constante de proporcionalidad k es igual a 30 y representa el precio de un lápiz.

- Cuando dos magnitudes son directamente proporcionales, la relación entre ellas es una función lineal en la que la **ordenada al origen es cero**, y la pendiente es la constante de proporcionalidad. Podemos reescribir la ecuación como

$$y = kx$$

  La proporcionalidad radica en que si x cambia en cierta proporción, por ejemplo se duplica, y cambia en esa misma proporción, es decir, en este caso también se duplica.



- Dos magnitudes son **inversamente proporcionales** cuando, al aumentar una de ellas, la otra disminuye en la misma proporción. Es decir, **el producto de ambas permanece constante**. En términos formales, dos variables x e y son inversamente proporcionales si y solo si existe una constante k tal que

$$y \cdot x = k$$

- Cuando dos magnitudes son inversamente proporcionales **la regla de tres se invierte**.

  Ejemplo: Si 4 obreros terminan una tarea en 6 días, ¿cuántos días tardarán 3 obreros?

$$\begin{array}{cc} \text{Obreros} & \text{Días} \\ 4 & 6 \\ 3 & a \end{array} \quad \Rightarrow a = \frac{4 \cdot 6}{3} = 8$$

  Verificación: $4 \cdot 6 = 3 \cdot 8 = 24$.

Ejercicios sobre proporcionalidad

(1) Resolver usando regla de tres simple directa:

(a) *2* es a *4* como *5* es a ...
(b) *2* es a *14* como *5* es a ...
(c) *3* es a *120* como *6* es a ...
(d) *3* es a *9* como *50* es a ...
(e) *6* es a *300* como *7* es a ...
(f) *12* es a *3* como *48* es a ...
(g) *10* es a *2* como *50* es a ...

(2) Resolver usando regla de tres simple directa:

(a) Si *2kg* de manzanas cuestan $\$160$, ¿cuánto cuestan *5kg* de manzanas?
(b) Un auto recorre *120km* en *2hs*, ¿cuántos km recorre el auto en *5hs*?
(c) Si *8* cuadernos cuestan $\$480$, ¿cuántos cuadernos se compran con $\$180$?
(d) Una máquina produce *150* piezas en *3hs*, ¿cuántas horas le demanda producir *250* piezas?
(e) Si *5* litros de pintura cubren $40m^2$, ¿cuántos metros cuadrados cubren *8* litros de pintura?
(f) Una impresora imprime *240* páginas en *8* minutos, ¿cuántos minutos tarda la impresora en imprimir *450* páginas?
(g) Para fabricar *30* kg de chocolate se necesitan *10* kg de cacao. ¿Cuántos kg de chocolate se podrán fabricar con *64* kg de cacao?
(h) Una persona que trabajó *13* horas cobró *115.200* pesos, ¿cuánto cobrará cuando trabaje *76* horas?

(3) Un comercio de La Plata posee tres sucursales y *56* empleados. Las sucursales son una pequeña, una mediana y una grande, siendo la pequeña la mitad de la mediana y la grande el doble de la mediana. Al definir la distribución de los empleados entre sucursales, se decide que en cada una de ellas haya personal proporcional al tamaño de cada sucursal. ¿Cuántos empleados irán a cada una?

4.2 Porcentajes

- El **porcentaje** es una forma de representar una proporción respecto a un total dividido en 100 partes iguales. Nos interesa aprender a realizar varios cálculos relacionados con porcentajes, todos ellos relacionados con la regla de tres simple:
  - Calcular el porcentaje p de un valor x
  - Determinar qué porcentaje representa un valor y sobre un valor x
  - Aplicar un incremento porcentual p en un valor x
  - Aplicar una reducción porcentual p en un valor x
  - Determinar qué porcentaje representa un cambio (aumento o disminución) de un valor original x_1 a un nuevo valor x_2, con respecto al valor original x_1.

- Para **calcular el** $p\,\%$ de una cantidad x, se multiplica esa cantidad por la fracción equivalente al porcentaje. También puede utilizarse su forma decimal.

$$p\,\% \text{ de } x = \frac{p}{100} \cdot x$$

Esta operación se interpreta como dividir el total x en 100 partes iguales y tomar p de esas partes.

Ejemplo: Calcular el $60\,\%$ de 300.

$$\frac{60}{100} \cdot 300 = 0{,}60 \cdot 300 = 180 \quad \rightarrow \quad \text{El } 60\,\% \text{ de } 300 \text{ es } 180.$$

La fracción equivalente es $60/100$ y su forma decimal es $0{,}60$.

- Para **calcular qué porcentaje** p **representa un valor** y sobre un valor total x.

$$p = \frac{y}{x} \cdot 100$$

. Esta operación se interpreta como "y es a x como p es a 100".

En el ejemplo anterior:

$$\frac{180}{300} \cdot 100 = 60 \rightarrow 180 \text{ representa el } 60\,\% \text{ de } 300$$

.

- En una calculadora, presionar la **tecla de porcentaje** es equivalente a dividir por 100.

- Es importante distinguir entre un porcentaje y la **aplicación de un incremento o una disminución (descuento) porcentual**. En el segundo caso queremos aumentar o disminuir un valor original en un determinado $p\,\%$; para eso sumamos o restamos el porcentaje al valor original y obtenemos un nuevo valor.

  Llamemos x_1 al **valor original** y x_2 al **nuevo valor** luego de aplicar un incremento o disminución de porcentaje p.

  Aumento: $x_2 = x_1 + p\,\%\text{ de } x_1 = x_1 + \frac{p}{100} \cdot x_1 = \left(1 + \frac{p}{100}\right) x_1$

  Disminución: $x_2 = x_1 - p\,\%\text{ de } x_1 = x_1 - \frac{p}{100} \cdot x_1 = \left(1 - \frac{p}{100}\right) x_1$

  Ejemplo de aumento: Un producto cuesta $\$500$ y aumenta un $12\,\%$, ¿cuál es el precio final?

  $500 \cdot (1 + 12/100) = 500 \cdot (1 + 0{,}12) = 500 \cdot 1{,}12 = 560 \rightarrow$ El precio final es 560.

  Ejemplo de disminución: Un producto cuesta $\$800$ y tiene un descuento del $25\,\%$, ¿cuál es el precio final?

  $800 \cdot (1 - 25/100) = 800 \cdot (1 - 0{,}25) = 800 \cdot 0{,}75 = 600 \rightarrow$ El precio final es 600.

- Para determinar **qué porcentaje representa un cambio** de un valor original x_1 a un nuevo valor x_2, sobre el valor original x_1.

$$p = \frac{x_2 - x_1}{x_1} \cdot 100, \qquad x_1 \neq 0$$

.

Esta operación se interpreta como "$x_2 - x_1$ es a x_1 como p es a 100".

Ejemplo de aumento: Un producto que originalmente cuesta $\$500$ pasa a costar $\$560$, ¿cuál es el porcentaje de cambio?

$$\frac{560 - 500}{500} \cdot 100 = \frac{60}{500} \cdot 100 = 12 \rightarrow \text{El precio aumenta un } 12\,\%.$$

Ejemplo de disminución: Un producto con precio de lista de $\$800$ se ofrece en oferta a $\$600$, ¿cuál es el descuento?

$$\frac{600 - 800}{800} \cdot 100 = \frac{-200}{800} \cdot 100 = -25 \rightarrow \text{El descuento es del } 25\,\%.$$

- Cuando el valor inicial es positivo, una reducción del $100\,\%$ lleva el valor final a cero. Si la magnitud que estamos considerando no puede tomar valores negativos, la reducción no puede superar el $100\,\%$.

- **Resumen de fórmulas**

Concepto	**Operación**
Calcular el $p\,\%$ de x	$\frac{p}{100} \cdot x$
Calcular qué porcentaje representa y respecto de un total x	$p = \frac{y}{x} \cdot 100$
Aumentar x en un $p\,\%$	$x \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)$
Reducir x en un $p\,\%$	$x \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)$
Calcular el porcentaje de incremento o reducción entre x_1 y x_2, con $x_1 \neq 0$	$p = \frac{x_2 - x_1}{x_1} \cdot 100$

- Tabla de porcentajes

Porcentaje p	**De acuerdo a la operación requerida multiplicar** x **por**				
	Porcentaje			**Incremento**	**Disminución**
$5\,\%$	$\frac{5}{100}$		$0{,}05$	$1{,}05$	$0{,}95$
$10\,\%$	$\frac{10}{100}$	$\frac{1}{10}$	$0{,}10$	$1{,}10$	$0{,}90$
$20\,\%$	$\frac{20}{100}$	$\frac{1}{5}$	$0{,}20$	$1{,}20$	$0{,}80$
$25\,\%$	$\frac{25}{100}$	$\frac{1}{4}$	$0{,}25$	$1{,}25$	$0{,}75$
$50\,\%$	$\frac{50}{100}$	$\frac{1}{2}$	$0{,}50$	$1{,}50$	$0{,}50$
$75\,\%$	$\frac{75}{100}$	$\frac{3}{4}$	$0{,}75$	$1{,}75$	$0{,}25$
$100\,\%$	$\frac{100}{100}$		1	2	0
$150\,\%$	$\frac{150}{100}$	$\frac{15}{10}$	$1{,}50$	$2{,}50$	–
$200\,\%$	$\frac{200}{100}$		2	3	–
$250\,\%$	$\frac{250}{100}$		$2{,}5$	$3{,}5$	–
$300\,\%$	$\frac{300}{100}$		3	4	–

- De la tabla anterior se desprenden las siguientes conclusiones:
  - Cuando calculamos un porcentaje de entre el $1\,\%$ y el $99\,\%$ de un valor, multiplicamos ese valor por una fracción propia (numerador menor a denominador), o, lo que es lo mismo, por un número decimal que está entre cero y uno. Por ejemplo:
    - El $20\,\%$ de x equivale a un quinto de su valor ($\times 0{,}20$)
    - El $25\,\%$ de x representa un cuarto de su valor ($\times 0{,}25$)
    - El $50\,\%$ de x corresponde a la mitad de su valor ($\times 0{,}50$)
    - El $75\,\%$ de x equivale a tres cuartos de su valor ($\times 0{,}75$)
  - El $100\,\%$ de x representa el valor completo ($\times 1$)
  - Cuando calculamos un porcentaje mayor al $100\,\%$ de un valor, multiplicamos ese valor por una fracción impropia (numerador mayor a denominador), o, lo que es lo mismo, por un número decimal mayor a uno. Por ejemplo:
    - El $200\,\%$ de x corresponde al doble de su valor ($\times 2$).

- El *300 %* de *x* corresponde al triple de su valor (*×3*).

- Es fundamental comprender la diferencia entre el porcentaje de un valor y un incremento o disminución porcentual

Ejercicios sobre porcentajes

(1) ¿Qué porcentaje representa *30* de *1.500*?

(2) ¿Qué porcentaje representa *150* de *400*?

(3) El *15 %* de una cantidad es *8*. ¿Cuál es el total?

(4) El *80 %* de una cantidad es *40*. ¿Cuánto es el total?

(5) El *20 %* de los alumnos reprobó el año académico. Si en el curso hay *40* alumnos matriculados, ¿Cuántos alumnos reprobaron el curso?

(6) Una calculadora costaba *45.000* pesos, y la rebajaron en un *35 %*. ¿Cuál es el precio con rebaja?

(7) Una persona paga por el alquiler de su vivienda *350.000* pesos mensuales. Le aumentaron el precio un *2 %*. ¿Cuál es el monto mensual que debe pagar ahora por el alquiler de su vivienda?

4.3 Aplicaciones de cálculos porcentuales

4.3.1. Interés sobre un depósito bancario

La siguiente tabla presenta tasas de interés ofrecidos por distintos bancos para un plazo fijo de duración de un año. Calcular el interés que se obtiene en cada banco si se depositan *100mil* pesos.

	Tasa	**Interés obtenido (en pesos)**
Banco Ciudad	*41 %*	
Banco Santander	*38 %*	
Banco Nación	*47 %*	
Banco BBVA	*45 %*	

4.3.2. Tasa de desempleo

La siguiente tabla presenta datos demográficos de cuatro centros urbanos. La población económicamente activa (PEA) corresponde al número de habitantes en edad de trabajar que se encuentran trabajando o buscando empleo. La población ocupada incluye a quienes dentro de la PEA tienen trabajo, mientras que la población desocupada comprende a quienes dentro de la PEA están desempleados. Podemos pensar la PEA como un conjunto universal compuesto por la unión de los conjuntos de ocupados y desocupados.

(a) Completar el número de población desocupada (desempleada).

(b) Calcular el porcentaje de desocupación sobre el total de la PEA (desempleados/PEA).

	Población económicamente activa	Población ocupada	Población desocupada	Desempleo en porcentaje
Córdoba	*1.050.000*	*953.000*		
La Plata	*520.000*	*475.000*		
Mendoza	*521.000*	*485.000*		
Salta	*300.000*	*283.000*		

4.3.3. Actualizaciones por inflación

La siguiente tabla presenta la inflación anual en Argentina desde 2020 hasta 2024. Una persona percibe durante 2020 un salario de *100mil* pesos. Cada 31 de diciembre su salario se actualiza de acuerdo a la inflación del año y se mantiene fijo durante todo el año siguiente. Completar la tabla con el salario percibido en cada año. Aclaración: este problema se refiere a aplicar incrementos porcentuales.

Año	Inflación anual (%)	Salario en pesos
2020	*36,1%*	*100.000*
2021	*50,9%*	
2022	*94,8%*	
2023	*211,4%*	
2024	*117,8%*	
2025	–	

4.3.4. Descuentos en precios

La siguiente tabla es una lista de precios de un negocio de electrodomésticos. La tercera columna indica el porcentaje de descuento que se aplica al pagar en efectivo. En la cuarta columna completar el precio por pago en efectivo. Aclaración: este problema se refiere a aplicar disminuciones porcentuales.

Producto	Precio	Descuento	Precio de efectivo
Heladera Whirlpool	$ *949.999*	*21%*	
Lavarropas Admiral	$ *479.999*	*12%*	
Microondas BGH	$ *209.999*	*5%*	

4.3.5. Comparación de valores de alquileres

La siguiente tabla presenta los valores promedio de alquiler durante los últimos años. Para cada año, se puede calcular cuánto más caro —en términos porcentuales— resulta alquilar un departamento de 2 dormitorios en comparación con uno de 1 dormitorio. Aclaración: Este problema se refiere a calcular cambios porcentuales entre dos valores x_1 (un dormitorio) y x_2 (dos dormitorios). Prestar atención a que no estamos haciendo comparaciones interanuales.

Año	1 dormitorio	2 dormitorios	Diferencia porcentual
2022	*52.500*	*72.500*	
2023	*92.500*	*130.000*	
2024	*200.000*	*310.000*	
2025	*525.000*	*825.000*	

4.3.6. Crecimiento económico

La siguiente tabla presenta el producto per cápita de Argentina, computado como lo producido en el país durante un año dividido por el número de habitantes. Los valores están expresados en dólares constantes. Nos interesa calcular el cambio porcentual en el producto per cápita, como medida del crecimiento económico. Aclaración: este problema se refiere a calcular cambios porcentuales a partir de valores originales y finales (x_1 y x_2).

(a) En la tercera columna calcular el crecimiento anual para cada año (cambio porcentual entre el PBI de un año y el del año anterior).

(b) En la cuarta columna calcular el crecimiento acumulado desde 2020 (cambio porcentual entre el PBI de un año y el del año 2020).

Año	PBI per cápita	Crecimiento porcentual anual	Crecimiento porcentual con respecto a 2020
2020	*10.626*	–	–
2021	*11.293*		
2022	*12.145*		
2023	*13.021*		
2024	*13.858*		

4.3.7. Evolución de la inflación

La siguiente tabla presenta el Índice de Precios al Consumidor (IPC) en Argentina, medido por el INDEC. La inflación se define como el cambio porcentual en el IPC. Nos interesa analizar la evolución de la inflación a lo largo del período. Aclaración: este problema se refiere a calcular cambios porcentuales a partir de valores originales y finales (x_1 y x_2).

Año	IPC	Inflación mensual	Inflación acumulada con respecto a dic. 2023
Diciembre 2023	*3.533,2*	–	–
Enero 2024	*4.261,5*		
Febrero 2024	*4.825,8*		
Marzo 2024	*5.357,1*		
Abril 2024	*5.830,2*		
Mayo 2024	*6.073,7*		
Junio 2024	*6.351,7*		
Julio 2024	*6.607,7*		
Agosto 2024	*6.883,4*		
Septiembre 2024	*7.122,2*		
Octubre 2024	*7.314,0*		
Noviembre 2024	*7.491,4*		
Diciembre 2024	*7.694,0*		

(a) En la tercera columna, calcular la inflación mensual (cambio porcentual entre el IPC de un mes y el del mes anterior).

(b) En la cuarta columna, calcular la inflación acumulada desde diciembre de 2023 (cambio porcentual entre el IPC de un mes y el de diciembre de 2023).

(c) La inflación anual durante 2024 se define como el cambio porcentual en el IPC entre diciembre de 2023 y diciembre de 2024. Está correctamente calculada en la última celda de la columna 4. Probemos ahora un cálculo alternativo: sumar los porcentajes de la tercera columna. ¿Por qué la inflación anual no es la suma de las inflaciones mensuales?

(d) ¿Cómo podríamos obtener correctamente la inflación anual durante 2024 a partir de las inflaciones mensuales de la tercer columna?

Algunos ejercicios de este cuadernillo están basados en el Taller de Matemática del CIEU FCE–UNLP 2025. (`http://sedici.unlp.edu.ar/handle/10915/180915`).